VOORBEELDEXAMEN

Hogere Wiskunde 2 - Deel 1

---

1. (10p) Veronderstel dat A en B $(p \times p)$-matrices zijn waarbij $B = [B_1\ B_2 \ldots B_p]$.

   a) Bewijs dat $AB = [AB_1\ AB_2 \ldots AB_p]$

   b) Veronderstel dat bovendien $AB_i = \lambda_i B_i$ met $\lambda_i \in I\!R$ en $i : 1, 2, \ldots, p$.
   Dan geldt dat

$$AB = [\lambda_1 B_1\ \lambda_2 B_2 \ldots \lambda_p B_p] \overset{(*)}{=} B \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_p \end{bmatrix}$$

   Bewijs de gelijkheid $(*)$.

   c) Veronderstel in deel b) dat de matrix B inversiebel is, dan geldt $\forall n \in I\!N$ dat

$$B^{-1} A^n B = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_p^n \end{bmatrix}$$

   Bewijs bovenstaande formule door gebruik te maken van het principe van volledige inductie.

2. (10p) Veronderstel dat A een willekeurige $(n \times n)$-matrix is.

   a) Men kan bewijzen dat

$$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = |A| I_n.$$

   Bovenstaande formules leren dat A inversiebel

   is asa .... (Vul in)

   b) Veronderstel dat er een matrix X bestaat zodat $AX = I_n$.
   Bewijs dat automatisch volgt dat $XA = I_n$.
   Hint: gebruik **het resultaat** van 2a).

   c) Uit deel 2b) weten we nu dat het product van $(n \times n)$-matrices commutatief is !!!
   Is deze uitspraak waar of vals ? Motiveer uw antwoord.

d) We berekenen de voorwaarden op de matrix A zodat er een matrix X bestaat waarvoor geldt $AX = I_n$.
Schrijf $X = [X_1\ X_2 \dots X_n]$. Dan is X_i de oplossing van het onderstaande stelsel (Vul aan).
Noteer dit stelsel in matrixnotatie.

De uitgebreide matrix van deze n-stelsels samen wordt gegeven als volgt:

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{Vul in} & \text{Vul in} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]$$

Na het toepassen van de Gauss-eliminatie bekomt men links in bovenstaand schema de canonieke trapvorm T_c van de matrix A.
Rechts in het schema staat er dan een matrix zonder enige nulrij.
Verklaar deze laatste zin kort.

Dit betekent dat deze n stelsels allemaal een oplossing hebben

asa ....(Vul in)

3. (8p) Veronderstel dat A een $(n \times n)$-matrix is met eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

a) We bewijzen dat $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.
Bewijs (Vul in)

- De karakteristieke veelterm $P_A(\lambda)$ wordt gedefinieerd met de volgende formule

  $P_A(\lambda) =$........................... (Vul in)

  Bijgevolg wordt de constante term van deze veelterm gegeven door $p_0 =$ .... (Vul in)

- Men kan aantonen dat de eigenwaarden van A precies de nulpunten zijn van $P_A(\lambda)$.
  Wegens de regel van Horner geldt dan:

  .... (Vul in)
- Trek de correcte conclusie op de correcte werkwijze.

b) Gegeven de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & \ell & -1 \\ 1 & m & -1 \end{bmatrix}$

- Voor welke waarde(n) van de parameters k, ℓ, m is $\lambda = 0$ een eigenwaarde van A ?
- Bereken alle eigenvectoren by $\lambda = 0$ als $k \neq m$.

4. (8p) Beschouw een stochastische matrix $M \in I\!R^{n\times n}$. Dit betekent $m_{ij} \geq 0$ $\forall i,j$ en $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1$ $\forall j$.

   a) Bewijs dat $\lambda = 1$ een eigenwaarde is van M.

   b) Stel $X \in I\!R^{n\times 1}$ en $X \neq 0$ zodat $MX = X$. Noteer $X^t = [x_1\ x_2 \ldots x_n]$ met $x_i \in I\!R$. Bewijs dat de vector $[|x_1|\ |x_2| \ldots |x_n|]^t$ eveneens een eigenvector is met eigenwaarde $\lambda = 1$.

      Vul in:
      Vermits $MX = X$, geldt er $\forall i$:

      $x_i =$ ....

      Bijgevolg $|x_i| =$ .... $\overset{(*)}{\leq}$ ....

      Hieruit volgt dat

      $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n}$ .... $= \sum_{j=1}^{n}$ .... $= \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

      Bijgevolg geldt

      $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$

      Wegens $(*)$ weten we nu dat

      $|x_i| =$ ....$\forall i : 1, 2, \ldots, n$.
      Bovenstaande gelijkheden betekenen precies:

$$M \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

   c) Van een stochastische (3×3)-matrix M is gegeven dat $V_1 = (-2, 4, 0)$ een eigenvector is bij de eigenwaarde $\lambda = 1$ en dat $V_2 = (-3, 1, 2)$ een eigenvector is bij de eigenwaarde $\lambda = \frac{1}{2}$.
      Bereken of de matrix M diagonaliseerbaar is.

5. (8p)

   a) Beschouw een vectorruimte $I\!R, V, +$ met de eindige, **vrije** deelverzameling $D = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Een willekeurige vector $v \in V$ kan hoogstens op één manier geschreven worden als een lineaire combinatie met vectoren uit D. Bewijs deze stelling.

b) Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +$ (alle reële veeltermen in de variabele x)

- Hoeveel vectoren zitten in de verzameling

  $D = \{1 + x, 1 - x, 2\}$? ....(Vul in)

- Hoeveel vectoren zitten in de vectorruimte

  $Vect(D)$? ....(Vul in)

- Is D een vrije verzameling in $\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +$? Leg kort uit.
- Kan de vector $v = x$ op twee verschillende manieren geschreven worden als een lineaire combinatie met vectoren uit D ?
  Leg kort uit.

6. (12p)

a) Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \overset{(*)}{=} 0$$

hierin stellen $p(x)$ en $q(x)$ continuë functies voor op een open interval I. Stel $W = \{y \in C(I) | y \text{ voldoet aan } (*)\}$. Bewijs dat W een deelruimte is van $C(I)$.

b) Neem $a \in I$. Stel dat y_1 en y_2, oplossingen zijn van $(*)$ zodat $y_1(a) = 1$, $y_1'(a) = 0$, $y_2(a) = 0$ en $y_2'(a) = 1$.

Dan is $\{y_1, y_2\}$ een vrij deel in $\mathbb{R}, W, +$. Bewijs deze bewering.

....

....

c) **Bewijs** dat $W \subseteq Vect\{y_1, y_2\}$.

d) De inclusie $Vect\{y_1, y_2\} \subseteq W$ is evident want we weten uit deel a) dat $\mathbb{R}, W, +$ een deelruimte is van $\mathbb{R}, C(I), +$.
M.a.w. $W = Vect\{y_1, y_2\}$ en dit betekent dat W een tweedimensio nale vectorruimte is.
Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' + \frac{1 - 2x}{x} y' + \frac{x - 1}{x} y \overset{(*)}{=} 0 \text{ met } x > 0$$

Er is gegeven dat de volgende functies oplossingen zijn van $(*)$:

$$y_1 = e^x;\ y_2 = e^x \ln 2;\ y_3 = e^x \ln 3;\ y_4 = e^x \ln x.$$

- Geef de algemene oplossing van $(*)$:

- Bereken de particuliere oplossing y van $(*)$ als $y(1) = e$ en $y'(1) = 0$.

7. (8p) Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' + by' + cy \stackrel{(*)}{=} 0 \text{ met } b, c \in I\!R$$

   a) Stel dat de functie $y = e^{mx}$ met $m \in I\!R$ een oplossing is van $(*)$. Hoe berekent men het getal m ? Leg uit.

   b) Veronderstel dat $b^2 - 4c < 0$. Bereken twee verschillende reële functies $\{y_1, y_2\}$ zodat y_2 geen scalair veelvoud is van y_1.

8. (8p) Bereken de cartesische vergelijking van het vlak α als $p = (3, 2, 1) \in \alpha$ en $\alpha \perp L$ waarbij L gegeven wordt door de cartesische vergelijking

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

9. (8p) Gegeven de matrix

$$A = [A_1\ A_2\ A_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & k & 0 \\ k+4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ met } k \in I\!R.$$

   a) Bewijs aan de hand van een eenvoudige berekening dat $rang\ A \geq 2$ $\forall k \in I\!R$.

   b) Bereken alle waarden van k zodat $rang\ A = 2$

   c) Stel $k = 1$, dan $A_3 \in\notin Vect\{A_1, A_2\}$ (Schrap wat niet past). Motiveer kort uw keuze.

10. (10p) Bereken de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijking. Maak de nodige gevalsonderscheidingen.

$$y'' + 2y' - 3y = 3e^{ax}.$$

11. (10p)

   a) Bereken $\iint\limits_{A_n} \dfrac{dx\, dy}{(2x + y)^2}$.

   A_n is het gebied in het XY-vlak dat begrensd wordt door de 4 rechten $y = x$, $y = x - 2$, $y + 2x = 1$ en $y + 2x = n$ met $n > 1$.
   Maak een schets van het gebied A_n.

   b) Bereken $\iint\limits_{R} \dfrac{dx\, dy}{(2x + y)^2}$

   als R het gebied is in het vlak dat **slechts begrensd** wordt door de 3 rechten $y = x$, $y = x - 2$, $y + 2x = 1$.