

Impuls, energie en massa

- § 1 Impuls (klassiek)
- § 2 Elastische en onelastische botsingen
- § 3 Relativistische impuls en energie
- § 4 Botsingen van (sub)atomaire deeltjes
- § 5 Massadefect bij kernreacties
- § 6 Bindingsenergie van atoomkernen

Bijlage: Afleiding van formules met relativistische impuls en energie

§ 1 Impuls (klassiek)

Inleiding

In deze paragraaf kijken we naar voorwerpen die op elkaar botsen en/of uit elkaar knallen. Daarbij staat de grootheid 'impuls' centraal. In de volgende paragraaf wordt naast de impuls ook naar de 'kinetische energie' van voorwerpen gekeken. In deze paragrafen worden beide begrippen behandeld volgens de klassieke mechanica. In de derde paragraaf gebeurt dit relativistisch.

Impuls van een voorwerp

Onder de 'impuls' p van een voorwerp met massa m en snelheid v verstaan we het product van massa en snelheid. Soms wordt de impuls ook wel de 'hoeveelheid van beweging' genoemd. In formulevorm is dit:

$$p = m \cdot v$$

Stel bijvoorbeeld dat een voorwerp een massa van 4,0 kg en een snelheid van 5,0 m/s heeft. Voor de impuls van het voorwerp geldt dan: $p = 4,0 \cdot 5,0 = 20 \text{ kgm/s}$. Als het voorwerp niet in de positieve, maar in de negatieve richting van de plaatsas (x-as) zou bewegen, zijn zowel de snelheid als de impuls negatief. We krijgen dan bijvoorbeeld: $p = 4,0 \cdot -5,0 = -20 \text{ kgm/s}$. De impuls heeft net als de snelheid een grootte en een richting en is dus een vector.

Als er op het voorwerp een constante kracht F over een zekere tijd Δt werkt, noemen we het product van F en Δt de 'stoot' van de kracht. De stoot op het voorwerp is gelijk aan de impulsverandering van het voorwerp. Er geldt dus:

$$F \cdot \Delta t = \Delta(m \cdot v).$$

Deze formule is eenvoudig af te leiden. Omdat de massa m constant is, kunnen we de bovenstaande formule namelijk schrijven als: $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$ en dat is de tweede wet van Newton (die meestal geschreven wordt als $F = m \cdot a$).

Wet van behoud van impuls

Als twee of meer voorwerpen krachten op elkaar uitoefenen waarbij er geen krachten van buitenaf op de voorwerpen werken, geldt de wet van behoud van impuls. Deze luidt als volgt. Voor een afgesloten groep voorwerpen (of deeltjes) is de totale impuls constant.

De wet van behoud van impuls is makkelijk te bewijzen. Als twee voorwerpen A en B een kracht op elkaar uitoefenen, is volgens de derde wet van Newton de kracht F_{AB} van A op B even groot als maar tegengesteld gericht aan de kracht F_{BA} van B op A. Kort opgeschreven is dit:

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

De stoot op A is dan ook even groot maar tegengesteld aan de stoot op B. Dus wat A aan impuls wint (verliest), moet B aan impuls verliezen (winnen).

In de rest van deze paragraaf beperken we ons tot twee voorwerpen. Neem het volgende voorbeeld dat in de onderstaande figuur is getekend. Blok A en blok B bevinden zich op een zeer gladde vloer (wrijvingskrachten zijn verwaarloosbaar). Van blok A bedraagt de massa 1 kg en van blok B 2 kg. Blok A botst met een snelheid van 6 m/s op blok B, dat tot dan nog in rust is. Na de botsing beweegt blok A met 2 m/s naar links en blok B met 4 m/s naar rechts.



De totale impuls voor de botsing is: $p(\text{totaal,voor}) = 1 \times 6 + 2 \times 0 = 6 \text{ kgm/s}$.
 De totale impuls na de botsing is: $p(\text{totaal,na}) = 1 \times -2 + 2 \times 4 = 6 \text{ kgm/s}$.
 Zoals verwacht, is de totale impuls voor de botsing dus gelijk aan de totale impuls na de botsing.

Voorbeeld van een opgave

Uit een geweer met een massa van 11 kg wordt een kogel van 130 g afgeschoten. De kogel krijgt een snelheid van 100 m/s. Bereken de snelheid van het geweer direct na het schot.

Oplossing

Vóór het moment van het schot is de impuls van het geweer met kogel nul.

Na het moment van het schot moet de totale impuls dus ook nul zijn.

Voor de impuls van de kogel geldt: $p(\text{kogel,na}) = 0,13 \times 100 = 13 \text{ kgm/s}$.

De bewegingsrichting van de kogel is hierbij positief genomen.

De impuls van het geweer is dan dus: $p(\text{geweer,na}) = -13 \text{ kgm/s}$.

Voor de snelheid van het geweer geldt dan:

$$v(\text{geweer,na}) = p(\text{geweer,na}) / m(\text{geweer}) = -13 / 11 = -1,2 \text{ m/s}.$$

Deze snelheid is negatief en is dus tegengesteld aan de richting, waarin de kogel beweegt. Dat betekent dat het geweer met een snelheid van 1,2 m/s tegen het lichaam van de schutter drukt. Dit staat bekend als de terugslag van een vuurwapen.

Opgaven bij § 1

Opgave 1

Een kanon heeft een massa van 1200 kg en schiet een kogel met een massa van 15 kg weg met een snelheid van 60 m/s. Bereken de snelheid van het kanon in achterwaartse richting direct na het afvuren van de kogel.

Opgave 2

Een boogschutter schiet met een pijl van 50 g op een appel van 200 g die op een paal gelegd is. Voordat de pijl de appel binnen dringt, heeft deze een snelheid van 20 m/s. De pijl blijft in de appel steken en samen vliegen ze verder. Bereken de snelheid van de appel (en de pijl) nadat deze door de pijl getroffen is.

Opgave 3

Een kogel A (massa = 3,0 kg) heeft een snelheid van 8,0 m/s naar rechts. A botst centraal tegen een kogel B (massa = 2,0 kg) die een snelheid van 7,0 m/s naar links heeft. Na de botsing beweegt kogel B met een snelheid van 6,0 m/s naar rechts. Bereken de snelheid van kogel A na de botsing. Neem bij de berekeningen naar rechts positief.

Opgave 4

In deze opgave gebruiken we de 'atomaire massa-eenheid' met symbool u . Een proton met een massa van $1,0\ u$ (afgerond op één decimaal) botst centraal met een snelheid van $1,0 \cdot 10^7\ \text{m/s}$ tegen een stilstaande heliumkern. Het proton kaatst terug met een snelheid van $0,6 \cdot 10^7\ \text{m/s}$. De heliumkern krijgt een snelheid van $0,4 \cdot 10^7\ \text{m/s}$.

Bereken de massa van de heliumkern. De impuls van de deeltjes kan hierbij het beste in de eenheid ' $u \cdot \text{m/s}$ ' worden uitgedrukt.

Opgave 5

Een raket in de ruimte kan zijn snelheid vergroten door aan de achterkant verbrandingsgassen uit te stoten en deze gassen een hoge snelheid mee te geven. Stel dat een raket met een massa van $500\ \text{kg}$ in een milliseconde (ms) een hoeveelheid gas met een massa van $0,015\ \text{kg}$ uitstoot en dit gas een snelheid meegeeft van $100\ \text{m/s}$, gerekend ten opzichte van de raket. Bereken dan de versnelling van de raket. Tip: verplaats jezelf in het gemeenschappelijke zwaartepunt van de raket en het uitgestoten gas.

§ 2 Elastische en onelastische botsingen

Kinetische energie

Voor de 'kinetische energie' E_K van een voorwerp met massa m en snelheid v geldt:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Stel weer dat een voorwerp een massa van 4,0 kg en een snelheid van 5,0 m/s heeft. Voor de kinetische energie van het voorwerp geldt dan:

$E_K = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 5,0^2 = 50 \text{ J}$. Ongeacht de richting van de snelheid kan de kinetische energie nooit een negatieve waarde krijgen.

Als er op het voorwerp een constante kracht F over een zekere afstand s werkt, noemen we het product van F en s de 'arbeid' van de kracht (F moet dan wel in de bewegingsrichting werken). Als het voorwerp in het begin in rust is (zijn kinetische energie is dan nul), is de eindwaarde van de kinetische energie even groot als deze arbeid. Er geldt dan dus:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = F \cdot s$$

Elastische en onelastische botsingen

We beperken ons in de volgende bespreking tot centrale botsingen van twee voorwerpen. Dat zijn botsingen waarbij alle snelheden langs één en dezelfde lijn gericht zijn. Zie bijvoorbeeld het bovenstaande voorbeeld met de blokken A en B. We kunnen bij zo'n centrale botsing in het algemeen twee fasen van het botsingsproces onderscheiden. In de eerste fase neemt de snelheid van de twee voorwerpen ten opzichte van elkaar af. Hierbij wordt kinetische energie (ten dele) omgezet in elastische (veer)energie. De eerste fase eindigt als beide voorwerpen dezelfde snelheid hebben gekregen; hun vormverandering is dan maximaal. In de tweede fase proberen de onderlinge krachten de vormverandering weer ongedaan te maken. Hierbij wordt de elastische energie (veerenergie) weer omgezet in kinetische energie. De tweede fase eindigt (en daarmee ook het botsingsproces) zodra de voorwerpen geen krachten meer op elkaar uitoefenen.

We kunnen bij botsingen twee grensgevallen onderscheiden namelijk:

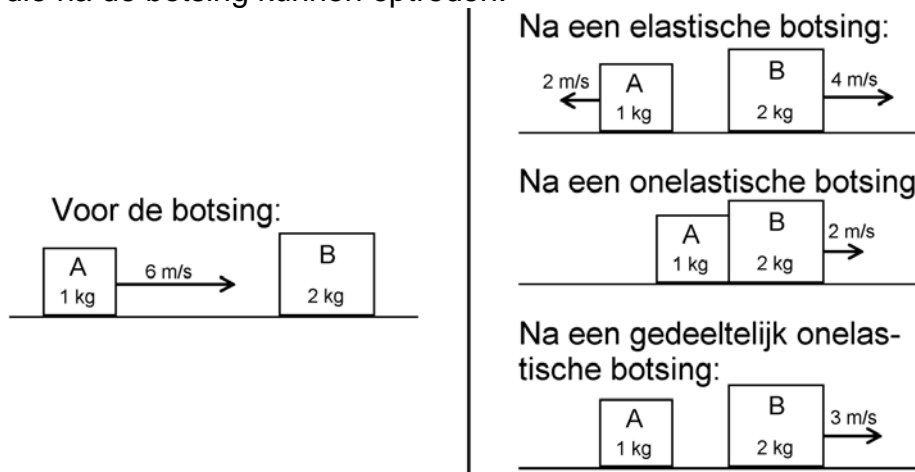
- 1) Elastische botsingen;
- 2) Onelastische botsingen.

Tussen deze twee grensgevallen liggen de gedeeltelijk onelastische botsingen.

Bij elastische botsingen worden gedurende de tweede fase van het botsingsproces de vormveranderingen van de beide voorwerpen geheel ongedaan gemaakt. Het gevolg is dat de totale kinetische energie na de botsing even groot is als de totale kinetische energie voor de botsing. Bij onelastische botsingen ontbreekt de tweede fase van het botsingsproces geheel. Beide voorwerpen gaan als één geheel verder. Er gaat een maximum aan kinetische energie verloren. Bij gedeeltelijk onelastische botsingen bewegen de voorwerpen na de botsing wel uit elkaar maar is de totale kinetische energie na de botsing kleiner dan die voor de botsing.

Voorbeeld

Neem het volgende voorbeeld dat een uitbreiding is van het voorbeeld uit de vorige paragraaf. Zie ook de onderstaande figuur. In de figuur zijn drie situaties getekend die na de botsing kunnen optreden.



In alle gevallen wordt aan de wet van behoud van impuls voldaan Zie hieronder.

Voor de botsing geldt:

$$p(\text{totaal, voor}) = 1 \times 6 + 2 \times 0 = 6 \text{ kgm/s.}$$

Na de elastische botsing geldt:

$$p(\text{totaal, na}) = 1 \times 2 + 2 \times 4 = 6 \text{ kgm/s.}$$

Na de onelastische botsing geldt:

$$p(\text{totaal, na}) = (1+2) \times 2 = 6 \text{ kgm/s.}$$

Na de gedeeltelijk onel. botsing geldt:

$$p(\text{totaal, na}) = 1 \times 0 + 2 \times 3 = 6 \text{ kgm/s.}$$

Nu kijken we naar de kinetische energieën.

Voor de botsing geldt:

$$E_k(\text{totaal, voor}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2 = 18 \text{ J.}$$

Na de elastische botsing geldt:

$$E_k(\text{totaal, na}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 = 18 \text{ J.}$$

Na de onelastische botsing geldt:

$$E_k(\text{totaal, na}) = \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 2^2 = 6 \text{ J.}$$

Na de gedeeltelijk onel. botsing geldt:

$$E_k(\text{totaal, na}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 = 9 \text{ J.}$$

Bij de elastische botsing gaat er geen kinetische energie verloren, want zowel voor als na de botsing bedraagt deze 18 J. Bij de onelastische botsing gaat er een maximum aan kinetische energie verloren. In ons voorbeeld is dit $18 \text{ J} - 6 \text{ J} = 12 \text{ J}$. Bij macroscopische voorwerpen wordt dit warmte en veerenergie in de voorwerpen. Bij de gedeeltelijk onelastische botsing wordt er minder dan 12 J aan energie omgezet in warmte (en veerenergie). De mate, waarin de botsing onelastisch is, wordt bepaald door de elasticiteit van de voorwerpen A en B.

Bij elastische botsingen ondergaan de voorwerpen in de tweede fase van het botsingsproces dezelfde snelheidsverandering als in de eerste fase. Met deze regel vinden we de snelheid van beide voorwerpen na zo'n elastische botsing. We gebruiken hierbij de onelastische botsing als einde van de eerste fase. Neem bijvoorbeeld blok A in ons voorbeeld. Vóór de botsing was zijn snelheid 6 m/s en na de eerste fase 2 m/s. De snelheid van blok A is dus met 4 m/s afgenomen. In de tweede fase neemt de snelheid van A dus weer met 4 m/s af. De eindsnelheid van A is bij een elastische botsing dus $2 - 4 = -2$ m/s. Voor blok B gaat dit analoog. In de eerste fase van de botsing neemt zijn snelheid toe met 2 m/s. Na de tweede fase van de botsing is zijn snelheid dus 4 m/s.

Voorbeeld van een opgave

In de figuur hiernaast beweegt een neonatoom (massa 20,0 u) met 500 m/s naar rechts en een argonatoom (massa 40,0 u) met 175 m/s naar links.



Beide atomen botsen centraal en elastisch op elkaar. Bereken de snelheid (in m/s) van het neonatoom na de botsing.

Oplossing

Voor de impuls voor de botsing geldt:

$$p(\text{voor}) = m(\text{Ne}) \cdot v(\text{Ne}) + m(\text{Ar}) \cdot v(\text{Ar}) = 20,0 \cdot 500 - 40,0 \cdot 175 = 3000 \text{ um/s}$$

Als de botsing onelastisch zou zijn, zou voor de snelheid gelden:

$$v(\text{na, onelastisch}) = \frac{p(\text{voor})}{m(\text{Ne}) + m(\text{Ar})} = \frac{3000 \text{ um/s}}{(20,0 + 40,0) \text{ u}} = 50 \text{ m/s}$$

De botsing is echter elastisch. Voor de snelheidsverandering van het neonatoom tijdens de eerste fase van de botsing geldt:

$$\Delta v = 50 - 500 = -450 \text{ m/s}$$

Voor de snelheid van het neonatoom na de botsing geldt dan:

$$v(\text{na, elastisch}) = 50 - 450 = -400 \text{ m/s}$$

Na de botsing beweegt het neonatoom dus met 400 m/s naar links.

Opgaven bij § 2

Opgave 1

Geef aan of de volgende beweringen waar of niet waar zijn.

- a)
De impuls van een bewegend deeltje heeft een richting.
- b)
De kinetische energie van een bewegend deeltje heeft een richting.
- c)
Als de snelheid van een deeltje verdubbeld, verdubbelt ook zijn impuls.
- d)
Als de snelheid van een deeltje verdubbeld, verdubbelt ook zijn kinetische energie.
- e)
Bij botsingen van voorwerpen geldt altijd de wet van behoud van impuls.
- f)
Bij botsingen van voorwerpen geldt altijd de wet van behoud van kinetische energie.
- g)
De kinetische energie gedeeld door de impuls van een bewegend voorwerp is evenredig met zijn massa.
- h)
De kinetische energie gedeeld door de impuls van een bewegend voorwerp is evenredig met zijn snelheid.

Opgave 2

Een boogschutter schiet met een pijl van 50 g op een appel van 200 g die op een paal gelegd is. Voordat de pijl de appel binnen dringt, heeft deze een snelheid van 20 m/s. De pijl blijft in de appel steken en samen vliegen ze verder.

- a.
Bereken de snelheid van de appel (en de pijl) nadat deze door de pijl getroffen is.

- b.
Bereken hoeveel kinetische energie verloren gaat als de pijl zich in de appel dringt.

Opgave 3

Een kogel A (massa = 3,0 kg) heeft een snelheid van 8,0 m/s naar rechts. A botst centraal tegen een kogel B (massa = 2,0 kg) die een snelheid van 7,0 m/s naar links heeft. Neem bij de berekeningen naar rechts positief.

a.

Toon aan dat de snelheid na een volkomen onelastische botsing (dus als beide kogels als één geheel verder zouden gaan) 2,0 m/s zou zijn.

b.

Bereken hoeveel kinetische energie er bij deze botsing verloren is gegaan.

c.

Bereken de snelheid van de kogels A en B na de botsing als deze volkomen elastisch zou zijn.

Opgave 4

Een neutron (massa 1,0 u) botst tegen een stilstaande heliumkern (massa 4,0 u) op. De botsing is centraal en elastisch. Voor de botsing is de snelheid van het neutron 10,0 km/s. Bereken de snelheid van het neutron na de botsing.

Opgave 5

In de figuur hiernaast explodeert een stilstaand voorwerp. Hierbij ontstaan er twee ongelijke delen die uit elkaar vliegen. Neem aan dat het zwaarste deel een n keer zo grote

massa heeft als het lichtste deel. In de figuur is m_2 dus n keer zo groot als m_1 .

Deze situatie komt bijvoorbeeld voor bij alfaverval van een instabiele atoomkern. Het alfadeeltje is dan veel en veel lichter dan de overgebleven atoomkern.

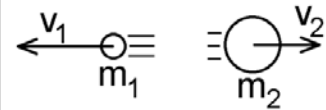
a.

Toon aan dat de snelheid v_1 van het lichtste deel n keer zo groot is als de snelheid v_2 van het zwaarste deel (laat het teken van de snelheden buiten beschouwing).

Voor de explosie:



Na de explosie:



b.

Toon aan dat de kinetische energie $E_{K,1}$ van het lichtste deel n keer zo groot is als de kinetische energie $E_{K,2}$ van het zwaarste deel.

§ 3 Relativistische impuls en energie

Relativistische impuls

Zoals in de bijlage wordt bewezen, geldt in de relativistische mechanica voor de impuls p van een voorwerp (of deeltje) met massa m en snelheid v :

$$p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De letter c stelt, zoals altijd, de lichtsnelheid voor. Merk op dat voor kleine snelheden (v veel kleiner dan c) de relativistische impuls overgaat in de klassieke impuls

$$p = m \cdot v.$$

Merk verder op dat het voorwerp nooit met de lichtsnelheid kan bewegen omdat de noemer van de breuk dan nul zou worden en de impuls van het voorwerp dus oneindig groot zou zijn.

Relativistische energie

Zoals in de bijlage wordt bewezen, geldt in de relativistische mechanica de volgende formule voor de totale energie E van een voorwerp (of deeltje) met massa m en snelheid v . Net als hierboven blijkt hieruit dat het voorwerp nooit met de lichtsnelheid kan bewegen omdat zijn energie dan oneindig groot zou moeten zijn.

$$E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

We kunnen het rechter lid schrijven als de volgende, oneindig lange, reeks:

$$E = \underbrace{m \cdot c^2}_{\text{rustenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{3}{8} \cdot m \cdot \frac{v^4}{c^2} + \frac{15}{48} \cdot m \cdot \frac{v^6}{c^4} + \dots}_{\text{kinetische energie}}$$

De eerste term van het rechter lid is de zogenoemde rustenergie van het deeltje. Als het voorwerp geen snelheid heeft (dus als $v = 0$), is de eerste term als enige groter dan nul. Om onderscheid te maken tussen energie en rustenergie, kan rustenergie met E_0 worden aangegeven. We krijgen dan dus:

$$E_0 = m \cdot c^2.$$

Alle volgende termen vormen samen de kinetische energie (bewegingsenergie) van het deeltje. De tweede term ($\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$) is groter dan de derde term; de derde term is weer groter dan de vierde term enzovoort. Als de snelheid klein is ten opzichte van de lichtsnelheid is de tweede term een goede benadering voor de kinetische energie. Dan geldt er dus:

$$E \approx \underbrace{m \cdot c^2}_{\text{rustenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}_{\text{kinetische energie}}.$$

Ook in de klassieke natuurkunde stelt $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ de kinetische energie van een deeltje voor.

Wiskundige toelichting op de bovenstaande reeksontwikkeling

Uit de wiskunde volgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \beta^2 + \frac{3}{8} \cdot \beta^4 + \frac{15}{48} \cdot \beta^6 + \dots$$

Als we deze reeksontwikkeling toepassen op de formule voor E waarbij we β gelijk stellen aan v/c , krijgen we:

$$E = m \cdot c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^4}{c^4} + \frac{15}{48} \cdot \frac{v^6}{c^6} + \dots \right]$$

Deze vergelijking kan geschreven worden als die hiervoor gegeven was.

Opmerking over massa

Om spraakverwarring te voorkomen, spreken we af dat de massa m van een voorwerp of deeltje voor iedere waarnemer gelijk is en dus onafhankelijk van zijn snelheid v is. De massa kan door een waarnemer, voor wie het deeltje in rust is, worden bepaald door het deeltje bij wijze van spreken op een weegschaal te leggen. In sommige boeken wordt onderscheid gemaakt tussen rustmassa en relativistische massa. Hier wordt dat onderscheid niet gemaakt en wij verstaan onder de massa altijd de rustmassa.

Getallenvoorbeelden met rustenergie en massa

Stel dat je aan een voorwerp energie toevoert en dat het voorwerp daarbij in rust blijft. De rustenergie van het voorwerp neemt dan dus toe. Volgens $E_0 = m \cdot c^2$ neemt dan ook zijn massa toe. Neem bijvoorbeeld een groot bekersglas, dat gevuld is met 1 kg water van 0 °C, in gedachten. Als water wordt verwarmd tot 100 °C, is hier 0,418 MJ aan warmte voor nodig (afgezien van de warmte die het bekersglas opneemt). De rustenergie van het water neemt dan toe met 0,418 MJ. De massa van het water neemt dan toe met:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0,418 \cdot 10^6}{(3,0 \cdot 10^8)^2} = 4,6 \cdot 10^{-12} \text{ kg}.$$

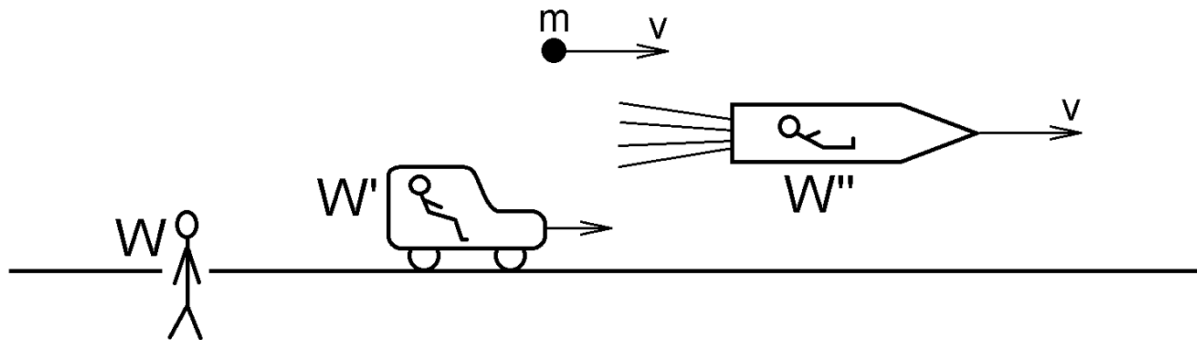
Door het feit dat het kwadraat van de lichtsnelheid zo groot is, zal de massatoename van het water niet merkbaar zijn.

Een ander voorbeeld is het uitrekken van een spiraalveer. Stel dat de veerconstante 100 N/m bedraagt en dat de veer 0,10 m wordt uitgerekt (vanuit de ontspannen toestand). De veer krijgt dan een veerenergie van 0,50 J. De massa van de veer neemt dan toe met:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0,50}{(3,0 \cdot 10^8)^2} = 5,6 \cdot 10^{-18} \text{ kg}.$$

Verband tussen energie en impuls

In de onderstaande figuur staat waarnemer W op de grond en ziet een voorwerp met massa m met een zeer grote snelheid v naar rechts bewegen. Waarnemer W' rijdt met zijn auto naar rechts en ziet het voorwerp ook naar rechts bewegen, alleen met een kleinere snelheid omdat W' zelf ook naar rechts beweegt. Waarnemer W'' vliegt in zijn raket naar rechts met dezelfde snelheid v als het voorwerp. Voor W'' staat het voorwerp dus stil.



Voor de drie waarnemers is (de grootte van) de impuls p van het voorwerp verschillend. Voor W is p het grootst; voor W' is p kleiner en voor W'' is p zelfs nul. Ook is de energie E van het voorwerp verschillend voor de drie waarnemers. Voor W is E het grootst vanwege de grote hoeveelheid kinetische energie; voor W' is E kleiner en voor waarnemer W'' bestaat E alleen maar uit rustenergie (geen kinetische energie).

De grootheid $E^2 - p^2 c^2$ blijkt voor de drie waarnemers W, W' en W'' echter wel gelijk te zijn. Zie het bewijs in de bijlage. De waarde van $E^2 - p^2 c^2$ is voor elke waarnemer namelijk $m^2 c^4$. Dit kun je meteen zien voor waarnemer W'' want voor hem is dit het kwadraat van de rustenergie.

Samenvattend kunnen we zeggen dat er het volgende verband tussen E en p bestaat.

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

In de speciale relativiteitstheorie komen we ook twee andere grootheden tegen waar alle waarnemers het over eens zijn, namelijk de lichtsnelheid in vacuüm en het ruimtetijdinterval tussen twee gebeurtenissen. We noemen deze grootheden invariant.

Impuls en energie van massaloze deeltjes (fotonen)

Fotonen zijn lichtdeeltjes die met de lichtsnelheid gaan ($v = c$) en geen massa hebben ($m = 0$). Fotonen hebben naast een energie E ook een impuls p . Het verband tussen deze p en E kan worden gevonden door in de laatste formule $m = 0$ te stellen. We krijgen dan:

$$p = \frac{E}{c}$$

Als zonlicht op je huid valt, voelt dat warm aan. Het is dan ook voor iedereen duidelijk dat fotonen energie hebben. Het feit dat fotonen ook een impuls hebben, is niet zo logisch. Je voelt namelijk niet dat de fotonen van het zonlicht je naar achteren duwen. Toch is dit wel het geval: elk foton, dat op je valt, levert een klein stootje in zijn bewegingsrichting. De impuls van een stroom fotonen levert een soort 'stralingsdruk' op. Zo voorkomt de stralingsdruk van de naar buiten gaande fotonen in de zon dat de zon onder zijn eigen gewicht instort. Ook heeft de stralingsdruk (deels) te maken met het feit dat de staart van kometen van de zon af gericht is.

Opgaven bij § 3

Opgave 1

Je verwarmt een groot blok ijzer. Bereken hoeveel warmte je aan het blok moet toevoeren om de massatoename van het blok een nanogram te laten zijn (nano = een miljardste).

Opgave 2

In de zon vindt kernfusie plaats en de zon is daardoor in staat om gedurende lange tijd zeer veel straling uit te zenden. Per seconde straalt de zon $3,85 \cdot 10^{26}$ J aan energie uit.

Bereken de massa-afname van de zon per seconde.

Opgave 3

Voor de kinetische energie E_K van een deeltje met massa m en snelheid v geldt:

$$E_K = m \cdot c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right].$$

a.

Bewijs deze formule.

b.

Als v veel kleiner is dan c , kan deze formule voor E_K sterk vereenvoudigd worden. Schrijf deze vereenvoudigde formule hieronder op.

Opgave 4

Een deeltje met massa m beweegt met 60% van de lichtsnelheid.

a.

Bereken hoeveel keer de (totale) energie van het deeltje groter is dan zijn rustenergie.

b.

Bereken hoeveel keer de kinetische energie van het deeltje groter is dan zijn rustenergie.

c.

Bereken bij welke snelheid van het deeltje de kinetische energie even groot is als de rustenergie.

Opgave 5

Jan staat met schaatsen op spiegelglad ijs. Recht achter hem bevindt zich een zeer sterke lichtbron die fotonen uitzendt. Jan heeft een spiegel op zijn rug gebonden om de van achteren komende fotonen te reflecteren. Elke keer als een foton door de spiegel gereflecteerd wordt, krijgt Jan een stootje naar voren. De impuls die Jan daarbij krijgt, is twee keer zo groot als de impuls van het foton.

a.

Leg dat laatste kort uit. Vergelijk dit bijvoorbeeld met het vangen en het teruggooien van een bal.

De massa van Jan (inclusief spiegel en schaatsen) bedraagt 50 kg. De fotonen die de lichtbron uitzendt, hebben allemaal een energie van $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ($= 1,0 \text{ eV}$).

b.

Bereken hoeveel fotonen op de spiegel moeten vallen om Jan een snelheid van 1,0 m/s te geven. Verwaarloos alle wrijvingskrachten en het effect van fotonen uit andere richtingen.

Opgave 6

Substitueer de formules $E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ en $p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ in $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$.

Laat vervolgens zien dat het rechterlid van de laatste vergelijking inderdaad $m^2 c^4$ is.

Opgave 7

Zoals in de leestekst staat, geldt de volgende formule voor de energie E van een deeltje (de formule is iets anders geschreven):

$$E = m \cdot c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right].$$

Voor kleine snelheden kunnen we deze formule benaderen door:

$$E = m \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

We kunnen deze formule schrijven als:

$$E = m \cdot c^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right]$$

Ga bij drie snelheden, namelijk bij 30%, 50% en 70% van de lichtsnelheid, na hoe goed de laatste vergelijking de eerste vergelijking benadert. Doe dat door bij beide vergelijkingen de uitdrukking binnen de vierkante haken te berekenen. Bereken vervolgens de procentuele afwijking bij deze drie snelheden.

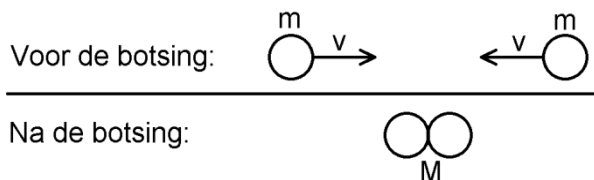
§ 4 Botsingen van (sub)atomaire deeltjes

Wet van behoud van impuls en wet van behoud van energie

Als twee of meer deeltjes krachten op elkaar uitoefenen, gelden de wet van behoud van impuls en de wet van behoud van energie. Dat geldt ook relativistisch! Bij de wet van behoud van energie mag de rustenergie niet weggelaten worden! In de volgende voorbeelden zullen we zien dat deeltjes, die energie opnemen, een grotere massa krijgen. De wet van behoud van massa geldt dus zeer beslist niet!

Voorbeeld: twee frontaal botsende deeltjes die één geheel vormen

Twee even zware deeltjes, ieder met massa m , botsen op elkaar en vormen daarbij één geheel. Het nieuw gevormde deeltje heeft massa M . We bekijken de botsing in het referentiestelsel van het massamiddelpunt (zwaartepunt) van het geheel. Zie de onderstaande figuur. Het linker deeltje beweegt met snelheid v naar rechts en het rechter deeltje beweegt met snelheid v naar links. Na de botsing is het geheel in rust. Omdat het nieuw gevormde deeltje in rust is, heeft het géén impuls en alleen rustenergie (geen kinetische energie).



Volgens de wet van behoud van impuls geldt:
$$\frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m \cdot (-v)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0.$$

Zoals verwacht wordt aan de wet van behoud van impuls voldaan voor elke waarde van m . Deze vergelijking brengt ons dus niet verder.

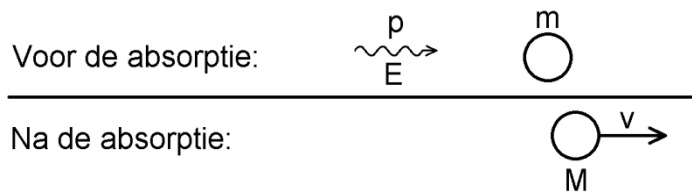
Volgens de wet van behoud van energie geldt:
$$\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = M \cdot c^2.$$

Uit de laatste vergelijking volgt dat:
$$M = \frac{2 \cdot m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

We zien dat de massa M na de botsing groter is dan de oorspronkelijke massa $2 \cdot m$ van de materie. Dit komt omdat de stof, waar de deeltjes uit bestaan, bewegingsenergie heeft geabsorbeerd.

Voorbeeld: een atoom absorbeert een foton

Nu bekijken we het geval waarbij een stilstaand atoom een van links komend foton absorbeert. Omdat het foton een impuls heeft, beweegt het atoom na de absorptie met snelheid v naar rechts. Zie de onderstaande figuur. Het foton heeft impuls p en energie E . Het atoom heeft voor de absorptie massa m en na de absorptie massa M .



Volgens de wet van behoud van impuls geldt (met $p = \frac{E}{c}$ gebruikt): $\frac{E}{c} = \frac{M \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Volgens de wet van behoud van energie geldt: $E + m \cdot c^2 = \frac{M \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Als we het linker en rechter lid van beide vergelijkingen kwadrateren en de leden vervolgens delen door c^2 respectievelijk c^4 , worden deze vergelijkingen:

$$\frac{E^2}{c^4} = \frac{M^2 \cdot v^2}{c^2 - v^2} \quad \text{en} \quad \left(\frac{E}{c^2} + m\right)^2 = \frac{M^2 \cdot c^2}{c^2 - v^2}.$$

Als we het verschil tussen de linkerleden gelijk stellen aan het verschil tussen de rechterleden krijgen we:

$$\frac{2 \cdot m \cdot E}{c^2} + m^2 = M^2$$

Hieruit volgt:

$$M = m \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot E}{m \cdot c^2}}.$$

Uit het feit dat de wortel in de bovenstaande formule altijd groter dan 1 is, blijkt dat de massa van het atoom is toegenomen. Dit is begrijpelijk, want de energie van het foton is voor een deel in rustenergie omgezet (en voor het andere deel in kinetische energie van het atoom).

Opgaven bij § 4

Opgave 1

Geef aan of de volgende beweringen waar of niet waar zijn.

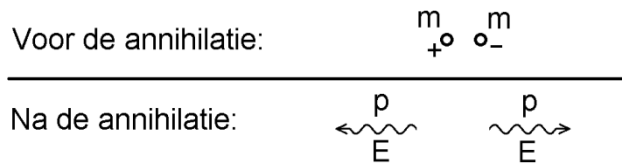
- 1)
Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes geldt de wet van behoud van impuls.
- 2)
Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes geldt de wet van behoud van energie.
- 3)
Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes geldt de wet van behoud van massa.
- 4)
Bij botsingen van (sub)atomaire deeltjes hoeft bij gebruik van de wet van behoud van energie de rustenergie niet in rekening gebracht te worden.
- 5)
Als een stilstaand (sub)atomair deeltje explodeert, is er vóór de explosie geen kinetische energie en na de explosie wel kinetische energie.
- 6)
Als een stilstaand (sub)atomair deeltje explodeert, blijft de totale massa gelijk of neemt deze toe.

Opgave 2

In de leestekst staat een voorbeeld waarbij twee even zware deeltjes op elkaar botsen en vervolgens één geheel vormen. Bereken de snelheid v , uitgedrukt als een fractie van c , waarmee elk deeltje naar het massamiddelpunt moet bewegen om de totale massa te verdubbelen.

Opgave 3

Bij radioactief verval van bepaalde isotopen ontstaat een zogenoemd 'positron'. Hiervan is de massa m gelijk aan die van een elektron en de lading tegengesteld aan die van een elektron. Als een positron en een elektron bij elkaar komen, treedt er 'annihilatie' op. Zie de onderstaande figuur. Hierbij verdwijnen het positron en het elektron en daarvoor in de plaats komen twee gammafotonen, allebei met impuls p en energie E .



a.

Leg uit dat na de annihilatie de twee fotonen in tegengestelde richting bewegen. Ga er daarbij vanuit dat het positron en het elektron vóór de annihilatie een verwaarloosbare snelheid hebben.

b.

Leid een formule af waarin de energie E van elk foton uit de massa m van het positron (en van het elektron) berekend kan worden.

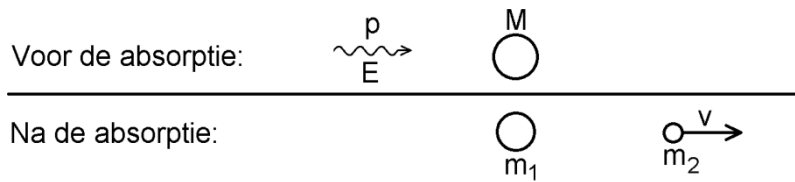
De massa van een elektron is $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg.

c.

Breken de energie van elk foton.

Opgave 4

In de onderstaande figuur absorbeert een in rust verkerend deeltje met massa M een foton met impuls p en energie E . Tijdens de absorptie vormen zich twee deeltjes. Het ene deeltje heeft massa m_1 en is nog steeds in rust. Het andere deeltje heeft massa m_2 en snelheid v .



a.

Pas de wet van behoud van impuls toe op deze situatie. Stel dus een vergelijking op met de in de figuur aangegeven grootheden.

b.

Pas de wet van behoud van energie toe op deze situatie. Stel dus weer een vergelijking op met de in de figuur aangegeven grootheden.

In de rest van deze opgave nemen we aan dat de snelheid van het bewegende deeltje 60% van de lichtsnelheid is (dus: $v = 0,6 \cdot c$).

c.

Toon aan dat dan uit de wet van behoud van impuls volgt dat voor het foton geldt:

$$E = 0,75 \cdot m_2 \cdot c^2.$$

d.

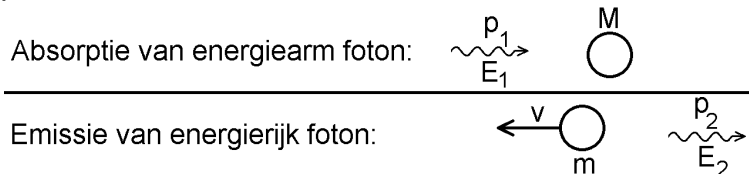
Toon aan dat de (totale) energie van het bewegende deeltje gelijk is aan $1,25 \cdot m_2 \cdot c^2$

e.

Toon aan dat uit de wet van behoud van energie volgt dat $M = m_1 + 0,5 \cdot m_2$.

Opgave 5

In de onderstaande figuur absorbeert een in rust verkerend atoom met massa M een van links komend foton dat impuls p_1 en energie E_1 heeft. Zeer korte tijd later zendt het atoom een naar rechts bewegend foton uit dat impuls p_2 en energie E_2 heeft. Het geëmitteerde foton heeft meer energie dan het geabsorbeerde foton (dus is E_2 groter dan E_1). Na de absorptie en emissie van beide fotonen heeft het atoom massa m en beweegt naar links met snelheid v . Het minteken komt voort uit het feit dat in deze opgave naar rechts positief genomen wordt. De waarde van v zelf is dus positief. Deze v is veel kleiner dan de lichtsnelheid c .



a.

Leg kort uit waarom het atoom na de emissie naar links beweegt.

b.

Pas de wet van behoud van impuls toe op het bovenstaande proces.

Bewijs vervolgens dat $v = \frac{E_2 - E_1}{m \cdot c}$.

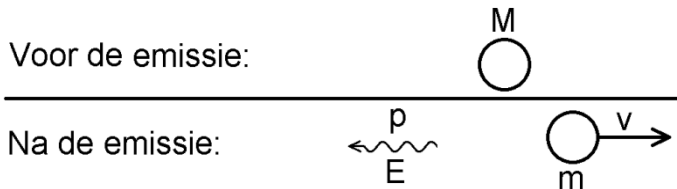
c.

Pas de wet van behoud van energie toe op het bovenstaande proces. Verwaarloos daarbij de kinetische energie van het atoom in de eindsituatie.

Bewijs vervolgens dat $\Delta m = m \cdot \frac{v}{c}$ waarin Δm de massa-afname van het atoom is.

Opgave 6

Een in rust verkerend atoom met massa M zendt een foton uit met energie E en impuls p . Zie de onderstaande figuur. Na de emissie van het foton is de massa van het atoom m . Hiervoor geldt: $m = M \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot E}{M \cdot c^2}}$. In deze opgave gaan we deze formule bewijzen.



Volgens de formule is m kleiner dan M . De massa van het atoom is blijkbaar kleiner geworden door het uitzenden van een foton.

a.

Leg kort uit hoe je dat kunt begrijpen.

Uit de wet van behoud van impuls volgt: $\left(\frac{E}{c^2}\right)^2 = \frac{m^2 \cdot v^2}{c^2 - v^2}$ (vergelijking A)

b.

Toon dat aan.

Uit de wet van behoud van energie volgt: $\left(M - \frac{E}{c^2}\right)^2 = \frac{m^2 \cdot c^2}{c^2 - v^2}$ (vergelijking B)

c.

Toon dat aan.

d.

Laat zien dat uit de vergelijkingen A en B de bovenstaande formule voor m volgt.

§ 5 Massadefect bij kernreacties

Elektronvolt

In de kernfysica wordt vaak gebruik gemaakt van de elektronvolt (afgekort eV) en de mega-elektronvolt (afgekort MeV) als eenheid van energie. Deze laatste is gelijk aan miljoen elektronvolt. Een elektronvolt is als volgt gedefinieerd.

Eén elektronvolt is de energieverandering van een elektron als deze een spanning van 1 volt doorloopt.

Er geldt: $1 \text{ elektronvolt} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ joule}$ (afgekort $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Het getal $1,602 \cdot 10^{-19}$ komen we ook tegen bij het elementair ladingsquantum. Dat is de lading van een proton en van een elektron (afgezien van het minteken). Hun lading is $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}$.

Atomaire massa-eenheid

In de kernfysica wordt ook vaak gebruik gemaakt van de 'atomaire massa-eenheid'. Deze is als volgt gedefinieerd.

De atomaire massa-eenheid is gelijk aan een twaalfde van de massa van een koolstof-12 atoom.

De atomaire massa-eenheid wordt meestal aangeduid met u. De massa van een koolstof-12 atoom is per definitie gelijk aan 12 u. Ruwweg is één u gelijk aan de massa van een proton of een neutron. Er geldt: $1 \text{ u} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Rustenergie behorend bij 1 atomaire massa-eenheid

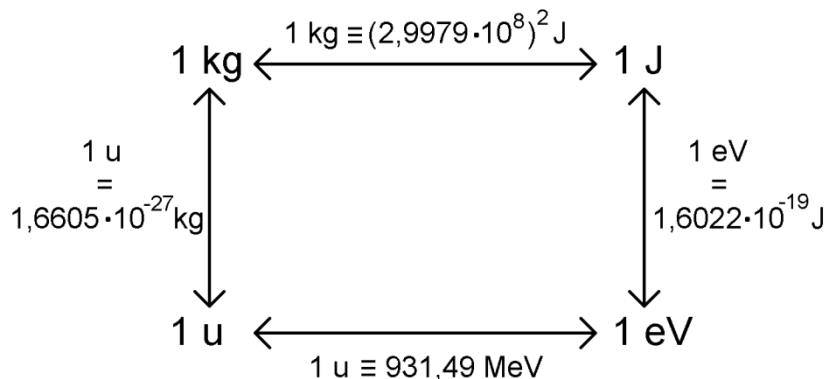
In de voorgaande paragraaf hebben we gezien dat een stilstaand deeltje met massa m een rustenergie E_0 heeft waarvoor geldt:

$$E_0 = m \cdot c^2.$$

Volgens deze formule heeft een voorwerp met een massa van 1 kg een rustenergie van $9 \cdot 10^{16} \text{ joule}$ (want $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; alles afgerond). We zoeken nu een soortgelijke regel voor de eenheden u (atomaire massa-eenheid) en MeV (mega elektronvolt).

Hierbij maken we gebruik van het schema hiernaast.

Eén atomaire massa-eenheid is gelijk aan $1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Eén kilogram komt overeen met $(2,9979 \cdot 10^8)^2 \text{ joule}$. Tenslotte is 1 joule gelijk aan $1/(1,6022 \cdot 10^{-19})$ elektronvolt. Met deze omrekenfactoren maken we de volgende berekening.

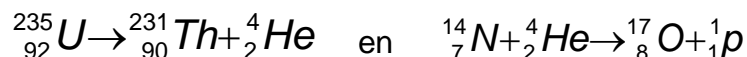


$$1\text{ u} \equiv (1,6605 \cdot 10^{-27}) \cdot (2,9979 \cdot 10^8)^2 \cdot \left(\frac{1}{1,6022 \cdot 10^{-19}} \right) \text{ eV} = 931,49 \text{ MeV}$$

Een massa van 1 u heeft dus een rustenergie van 931,49 MeV. In de rest van deze paragraaf zullen we dit veelvuldig gebruiken.

Massadefect

Hieronder staan twee voorbeelden van kernreacties.



De eerste reactie geeft het alfaverval van een uranium-235 kern weer. Een alfadeeltje (dus een helium-4 kern) wordt met grote snelheid weggeschoten waarbij een thorium-231 kern achterblijft. Bij de tweede reactie wordt een stikstof-14 kern beschoten met een alfadeeltje. Daarbij ontstaan een zuurstof-17 kern en een proton.

Bij de eerste reactie vindt er een afname van de massa plaats want de massa van de uraniumkern is groter dan de gezamenlijke massa van de thoriumkern en het alfadeeltje. Bij de tweede reactie vindt er een toename van de massa plaats. De gezamenlijke massa van de stikstofkern en het alfadeeltje is namelijk kleiner dan de gezamenlijke massa van de zuurstofkern en proton. Het massaverschil tussen voor en na de reactie wordt in beide gevallen het massadefect genoemd.

Als de totale massa bij een kernreactie afneemt (zoals bij de eerste reactie), zal de totale rustenergie natuurlijk ook afnemen. Volgens de wet van behoud van energie wordt een deel van de oorspronkelijke rustenergie dan omgezet in een andere energievorm. In ons voorbeeld is dat kinetische energie van het alfadeeltje en van thoriumkern. Als de totale massa bij een kernreactie toeneemt (zoals bij de tweede reactie), zal de totale rustenergie ook toenemen. Volgens de wet van behoud van energie is een andere energievorm in deze extra rustenergie omgezet. In ons voorbeeld is dat kinetische energie van het aanstormende alfadeeltje.

Uitwerking van de eerste kernreactie

We bekijken de eerstgenoemde kernreactie: ${}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{90}^{231}\text{Th} + {}_2^4\text{He}$

De massa van de uraniumkern bedraagt 234,99345 u.

De massa van de thoriumkern bedraagt 230,98693 u.

De massa van de heliumkern (= alfadeeltje) bedraagt 4,00151 u.

Voor het massadefect Δm geldt:

$$\Delta m = 234,99345 \text{ u} - (230,98693 \text{ u} + 4,00151 \text{ u}) = 0,00501 \text{ u}.$$

Voor de vrijkomende energie ΔE geldt:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,00501 \text{ u} \cdot 931,49 \text{ MeV/u} = 4,67 \text{ MeV}.$$

Verreweg het grootste deel van deze energie is kinetische energie van het alfadeeltje.

Uitwerking van de tweede kernreactie

We bekijken nu de tweede kernreactie: ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{p}$

De massa van de stikstofkern bedraagt 13,99923 u.

De massa van de heliumkern (= alfadeeltje) bedraagt 4,00151 u.

De massa van de zuurstofkern bedraagt 16,99474 u.

De massa van het proton bedraagt 1,00728 u.

Voor het massadefect Δm geldt:

$$\Delta m = (16,99474 \text{ u} + 1,00728 \text{ u}) - (13,99923 \text{ u} + 4,00151 \text{ u}) = 0,00128 \text{ u}.$$

De benodigde energie ΔE geldt:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 0,00128 \text{ u} \cdot 931,49 \text{ MeV/u} = 1,19 \text{ MeV}.$$

In de praktijk zal de kinetische energie van het alfadeeltje groter dan 1,19 MeV moeten zijn want na de reactie hebben het proton en de zuurstofkern ook kinetische energie.

Werken met atoommassa's in plaats van kernmassa's

We blijven nog even bij de vergelijking ${}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{231}_{90}\text{Th} + {}^4_2\text{He}$.

Bij het bepalen van het massadefect van de reactie moeten we kernmassa's van elkaar aftrekken. BINAS geeft in tabel 25 echter atoommassa's en geen kernmassa's. Toch is dat hier geen probleem. Als je de uraniumkern, de thoriumkern en de heliumkern voorziet van respectievelijk 92 elektronen, 90 elektronen en 2 elektronen en vervolgens de atoommassa's van elkaar aftrekt, vallen de elektronmassa's namelijk weer weg. We gaan dit hieronder even na.

De massa van het uranium-235 atoom bedraagt 235,04392 u.

De massa van het thorium-231 atoom bedraagt 231,03630 u.

De massa van het helium-4 atoom bedraagt 4,00260 u.

Voor het massadefect Δm geldt:

$$\Delta m = 235,04392 \text{ u} - (231,03630 \text{ u} + 4,00261 \text{ u}) = 0,00501 \text{ u}.$$

Dit resultaat hadden we al eerder gevonden.

Opmerking

In sommige gevallen kom je er niet onderuit om met kernmassa's te werken. Dan moet je de atoommassa's (die in BINAS staan) verminderen met de massa van de bijbehorende elektronen.

Opgaven bij § 5

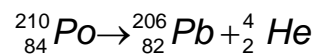
Opgave 1

Wat verstaan we onder 1 elektronvolt?

Wat verstaan we onder 1 atomaire massa-eenheid?

Opgave 2

De onderstaande reactie geeft het alfaverval van polonium-210 weer.



a.

Bepaal het massadefect van deze reactie.

b.

Leg kort uit dat er energie vrijkomt bij deze reactie.

c.

Bereken hoeveel energie (in MeV) er vrijkomt.

Het alfadeeltje krijgt bij het verval een kinetische energie van 5,3 MeV.

d.

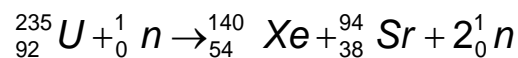
Leg uit waarom er een verschil zit tussen de bij c. gevonden waarde en de genoemde 5,3 MeV.

Opgave 3

Net als een dozijn (12) en een gros (144) is een 'mol' een aanduiding voor een aantal. Een mol is het aantal koolstof-12 atomen dat een gezamenlijke massa van 12 gram heeft. Dit aantal is $6,022 \cdot 10^{23}$. Leg uit wat het verband is tussen een mol en de atomaire massa-eenheid.

Opgave 4

In de volgende kernreactie absorbeert een uranium-235 kern een neutron. Vervolgens valt de kern uiteen in een xenon-140 kern en een strontium-94 kern. Bovendien worden twee neutronen weggeschoten.



a.

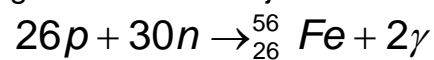
Bepaal het massadefect.

b.

Bereken de energie (in MeV) die vrijkomt.

Opgave 5

In de volgende denkbeeldige kernreactie komen 26 losse protonen en 30 losse neutronen samen en vormen een ijzer-56 kern. Er komen hierbij twee gelijke gammafotonen vrij.



a.

Bepaal het massadefect.

b.

Bereken de energie van elk afzonderlijk gammafoton. Neem daarbij aan dat de losse protonen, neutronen en ijzerkern een verwaarloosbare kinetische energie hebben.

Opgave 6

Polonium-212 is een alfastraler en bijvoorbeeld geen bètastraler. We kunnen dit nagaan door naar de massaverandering bij beide vervalvergelijkingen te kijken.

a.

Stel de vergelijking van alfaverval van polonium-212 op.

b.

Bepaal het massadefect bij deze vergelijking.

c.

Stel de vergelijking van bètaverval (preciezer: bèta min verval) van polonium-212 op.

d.

Bepaal het massadefect bij deze vergelijking. De massa van een astaat-212 atoom bedraagt 211,99075 u.

e.

Leg uit dat alfaverval wel mogelijk is en bètaverval niet.

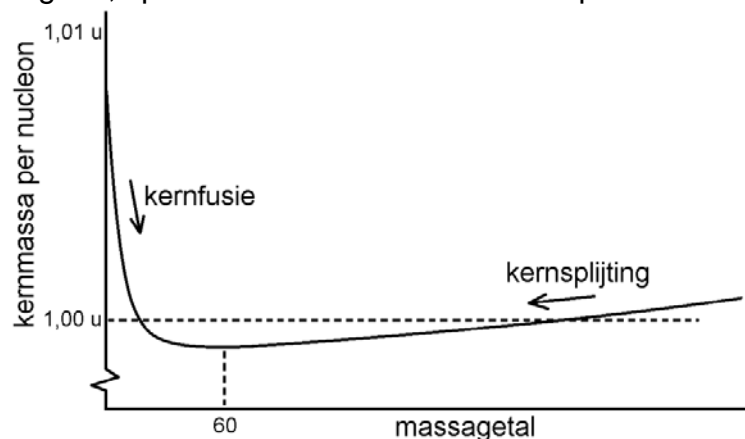
§ 6 Bindingsenergie van atoomkernen

Kernmassa

Ter herinnering volgt hier wat basisinformatie. Atoomkernen zijn opgebouwd uit protonen en neutronen. Protonen en neutronen worden nucleonen (kerndeeltjes) genoemd. Onder het massagetal van een atoomkern verstaan we het aantal nucleonen waaruit deze kern is opgebouwd. Protonen en neutronen hebben bijna dezelfde massa die zeer dicht bij 1 u (atomaire massa-eenheid) ligt.

Het massagetal is bij benadering een goede maat voor de kernmassa. Als we de kernmassa delen door het massagetal, spreken we over de kernmassa per nucleon.

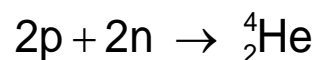
Van alle atoomkernen ligt de kernmassa per nucleon zeer dicht bij 1 u. Toch zien we kleine verschillen. De kernmassa per nucleon is het laagst bij massagetalen rond 60. Zie het diagram hiernaast waarin het globale verloop van de kernmassa per nucleon is uitgezet tegen het massagetal.



In het diagram zijn kernfusie en kernsplijting aangegeven. Bij kernfusie worden kleine atoomkernen gecombineerd tot grotere kernen. Zoals uit het diagram blijkt, verdwijnt er dan wat massa en wordt rustenergie omgezet in een andere energievorm. Bij kernsplijting worden zware atoomkernen gesplitst in kleinere kernen. Ook nu verdwijnt er wat massa en komt er, net als bij kernfusie, energie vrij.

Bindingsenergie

Een atoomkern zou je theoretisch kunnen 'maken' door losse protonen en losse neutronen bij elkaar te brengen. Bijvoorbeeld kan de vorming van een helium-4 kern uit twee losse protonen en twee losse neutronen door de volgende vergelijking beschreven worden.



Bij het ontstaan van een atoomkern uit losse protonen en neutronen komt er energie vrij: de zogenoemde bindingsenergie. Omgekeerd kost het energie om een atoomkern te ontleden in losse protonen en neutronen. Bijvoorbeeld komt er 28,3 MeV vrij bij het ontstaan van een helium-4 kern en kost het ook 28,3 MeV om een heliumkern te ontleden.

Samenvattend geldt dus:

De bindingsenergie van een atoomkern is de energie die vrij komt als deze atoomkern uit losse nucleonen wordt opgebouwd en omgekeerd de energie die nodig is om de atoomkern te scheiden in losse nucleonen.

Als losse protonen en neutronen bij elkaar komen en er een atoomkern ontstaat, neemt de massa af. Uit het massadefect volgt de bindingsenergie van die atoomkern. Laten we de bovenstaande reactie nemen. Het massadefect Δm kan als volgt berekend worden.

$$\Delta m = 2 \cdot m(\text{proton}) + 2 \cdot m(\text{neutron}) - m(\text{helium-4 kern}) = 0,03038 \text{ u.}$$

Er komt dan $0,03038 \text{ u} \cdot 931,49 \text{ MeV/u} = 28,3 \text{ MeV}$ aan energie vrij.

Bindingsenergie per nucleon

Elke atoomkern heeft zijn eigen bindingsenergie. Zie de volgende voorbeelden.

Helium-4 kern: 28,3 MeV (zie hierboven);

Zuurstof-16 kern: 128 MeV;

IJzer-56 kern: 492 MeV;

Uranium-238 kern: 1802 MeV.

Als je naar deze waarden kijkt, zou je kunnen denken dat van de vier genoemde kernen de uranium-238 kern het stabielst is. Bij zijn ontstaan uit losse nucleonen (dit zijn protonen en neutronen) komt er immers de meeste energie vrij. Toch is dit niet het geval want er zijn ook heel veel nucleonen bij betrokken. Met hetzelfde aantal losse nucleonen zou je bijvoorbeeld meerdere (veel kleinere) ijzer-56 kernen kunnen maken. Het is daarom eerlijker om de bindingsenergie te delen door het massagetal.

Aldus krijgen we:

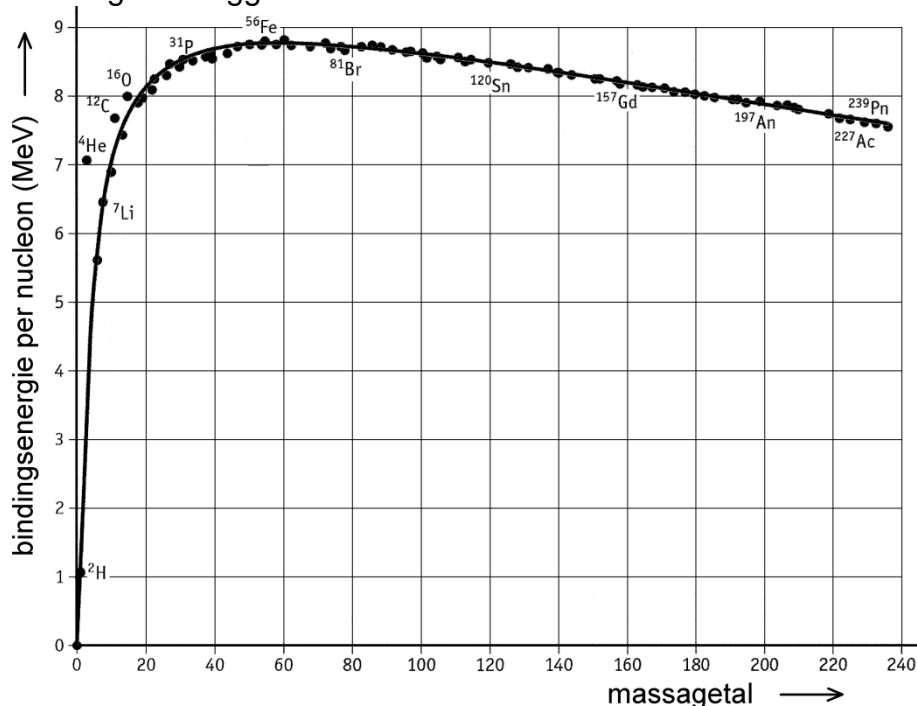
Helium-4 kern: $28,3 / 4 = 7,1 \text{ MeV}$ (zie hierboven);

Zuurstof-16 kern: $128 / 16 = 8,0 \text{ MeV}$;

IJzer-56 kern: $492 / 56 = 8,8 \text{ MeV}$;

Uranium-238 kern: $1802 / 238 = 7,6 \text{ MeV}$.

Binnen het rijtje heeft ijzer-56 de hoogste bindingsenergie per nucleon. Deze atoomkern is daarmee het stabielst. In het volgende diagram is de bindingsenergie per nucleon uitgezet tegen het massagetal. Ga na dat ijzer-56 en nikkel-60 op de top van de grafiek liggen.



Opgaven bij § 6

Opgave 1

Druk in deze opgave de massa uit in u (= atomaire massa-eenheid) en werk met minstens 5 decimalen.

a.

Bereken de kernmassa per nucleon van helium-4.

b.

Bereken de kernmassa per nucleon van nikkel-60.

c.

Bereken de kernmassa per nucleon van uranium-238.

d.

Vergelijk de uitkomsten van a, b en c met elkaar. Leg uit dat dit in overeenstemming is met de leestekst.

e.

Zoek de massa van een proton en van een neutron op. Vergelijk deze waarden met de bovengevonden waarden. Wat valt je op?

Opgave 2

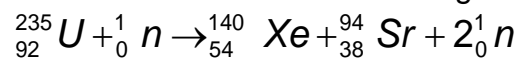
a.

Schrijf de reactievergelijking op waarbij een uranium-235 kern uit losse protonen en neutronen voortkomt.

b.

Toon aan dat de bindingsenergie per nucleon van uranium-235 gelijk is aan 7,6 MeV.

In een kerncentrale vindt de volgende reactie plaats.



c.

Lees uit het diagram in de leestekst (de bindingsenergie per nucleon uitgezet tegen het massagetal) af hoe groot de bindingsenergie per nucleon is van de xenon-140 kern en van de strontium-94 kern.

d.

Bereken met deze gegevens hoeveel energie (in MeV) bij deze reactie vrijkomt.

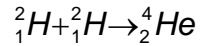
Opgave 3

In een bepaalde fase van het bestaan van een ster kan de kern van de ster vrijwel geheel uit helium bestaan. In relatief korte tijd kan al dat helium worden omgezet in koolstof. Dit gebeurt alleen bij relatief zware sterren. Stel dat de kern van een zware ster een massa van $4,00 \cdot 10^{30}$ kg heeft (dit is twee keer de massa van onze zon) en dat deze kern geheel uit helium-4 bestaat. Bepaal dan hoeveel joule energie er vrijkomt bij de omzetting van deze gehele heliumvoorraad in koolstof-12. Doe dat op de volgende manier.

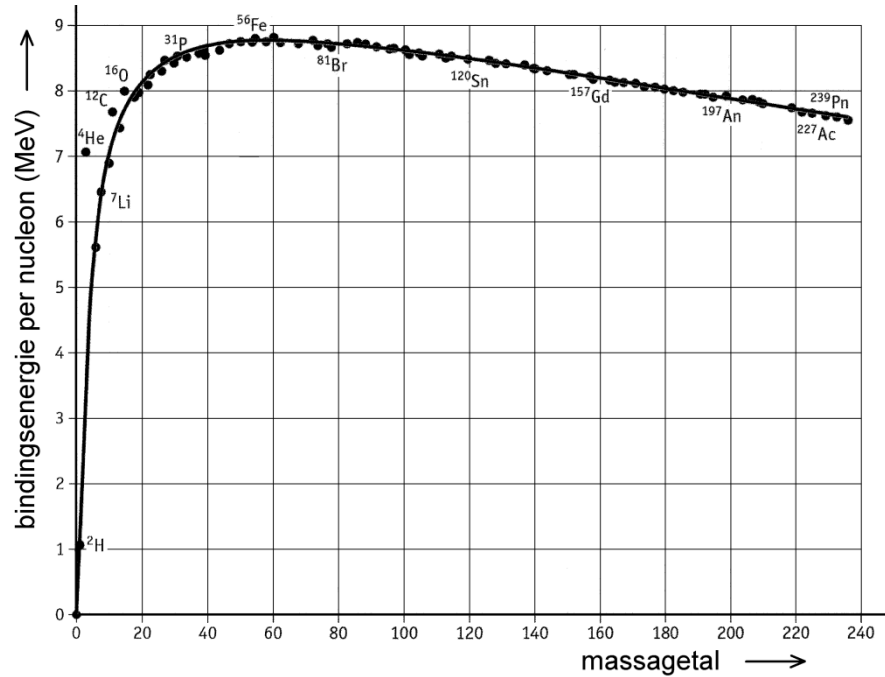
- Stap 1: Lees uit het bovenstaande diagram de toename aan bindingsenergie per nucleon af bij deze omzetting.
- Stap 2: Bereken het totaal aantal nucleonen dat in de kern van deze ster zit.
- Stap 3: Combineer stap 1 en 2.

Opgave 4

Stel je de volgende niet reële situatie voor. Iemand laat in een eigen kernfusiereactor 20 kilogram deuterium (waterstof-2) fuseren tot helium-4 volgens de volgende reactie.



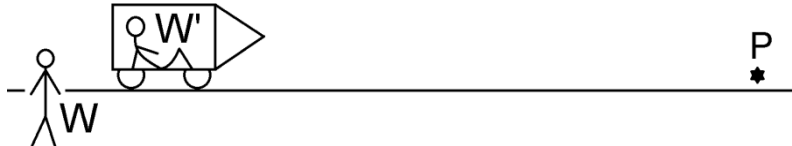
Bereken dan hoeveel joule daarbij vrijkomt. Maak daarbij gebruik van het diagram hiernaast.



Afleiding van formules met relativistische impuls en energie

Lorentztransformatie

In de onderstaande figuur beweegt waarnemer W' ten opzichte van waarnemer W met snelheid v naar rechts. Op het moment dat de oorsprongen van W en W' samenvallen, zetten beiden hun klokken op nul. We beschouwen een willekeurige gebeurtenis P . In de figuur is deze met een ster aangegeven.



Allereerst definiëren we de symbolen β en γ als volgt (met c = lichtsnelheid):

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Voor waarnemer W zijn de coördinaten van de gebeurtenis t (= tijd) en x (= plaats). Voor W' kunnen de coördinaten t' en x' van dezelfde gebeurtenis met de lorentztransformatie uit t en x berekend worden. Zie de onderstaande twee vergelijkingen.

$$ct' = \gamma(ct - \beta \cdot x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta \cdot ct)$$

Viervector

We zijn in de natuurkunde gewend aan 3-dimensionale vectoren. Denk bijvoorbeeld aan kracht- en snelheidsvectoren. Zo bevat een krachtvector drie componenten, namelijk F_x , F_y en F_z . Hierna wordt gebruik gemaakt van viervectoren. Een viervector bevat vier componenten. Zo bevat viervector A (altijd als hoofdletter schrijven!) de componenten a_0 , a_1 , a_2 en a_3 . Dit kan kort opgeschreven worden als:

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Het inwendig product $A \cdot B$ van twee viervectoren A en B is per definitie:

$$A \cdot B = a_0 \cdot b_0 - a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 - a_3 \cdot b_3.$$

Hierna beperken we ons tot relativistische viervectoren. Voor een relativistische viervector geldt dat zijn componenten voor de ene waarnemer (W) kunnen worden omgerekend naar de componenten voor de andere waarnemer (W') door middel van de lorentztransformatie. Als we ons verder beperken tot een viervector A waarvan alleen de eerste twee componenten getransformeerd worden en de laatste twee componenten steeds nul zijn (dus $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2' = 0$ en $a_3' = 0$), geldt:

$$a_0' = \gamma(a_0 - \beta \cdot a_1)$$

$$a_1' = \gamma(a_1 - \beta \cdot a_0)$$

Als we het hierna over een viervector hebben, bedoelen we steeds een relativistische viervector.

Twee belangrijke eigenschappen van viervectoren zijn de volgende:

Eigenschap 1

Het inwendig product van een viervector met zichzelf geeft voor iedere waarnemer dezelfde uitkomst. Anders gezegd: het inwendig product is invariant.

In het geval van $A = (a_0, a_1, 0, 0)$ en $A' = (a_0', a_1', 0, 0)$ geldt dus: $a_0^2 - a_1^2 = a_0'^2 - a_1'^2$

Eigenschap 2

Als je de componenten van een viervector vermenigvuldigd met een constante factor k die voor alle waarnemers gelijk is, ontstaat er een nieuwe viervector.

Positie-viervector

In het algemeen wordt een gebeurtenis gekenmerkt door de drie ruimtelijke coördinaten x , y en z en één tijdcoördinaat t . We definiëren nu de positie-viervector X als:

$$X = (ct, x, y, z).$$

Door deze keuze van de componenten is X automatisch een (relativistische) viervector.

Het inwendig product van X met zichzelf wordt:

$$X \cdot X = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Omdat wij ons beperken tot gebeurtenissen langs de x -as (dus $y = z = 0$) wordt dit:

$$X \cdot X = (ct)^2 - x^2.$$

In het rechterlid herkennen we het kwadraat van het ruimtetijdinterval dat wordt aangegeven met s^2 . Omdat het ruimtetijdinterval invariant is (dus niet verschilt van waarnemer tot waarnemer), geldt:

$$X \cdot X = X' \cdot X'$$

Aan de eerder genoemde eerste eigenschap van viervectoren is dus voldaan.

Verplaatsings-viervector

Naast de coördinaten van een gebeurtenis laten zich ook coördinaatverschillen met de lorentztransformatie omrekenen van de ene naar de andere waarnemer. Stel dat er twee (willekeurige) gebeurtenissen plaatsvinden. Als Δt de tijd tussen beide gebeurtenissen is en Δx het verschil tussen de x -coördinaten van de gebeurtenissen (en analoog voor Δy en Δz), kunnen we de verplaatsing-viervector als volgt definiëren.

$$\Delta X = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z).$$

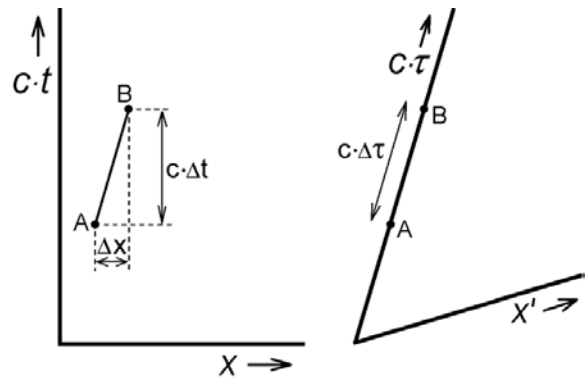
Voor het inwendig product van ΔX met zichzelf geldt:

$$\Delta X \cdot \Delta X = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Het rechterlid is weer het kwadraat van het ruimtetijdinterval (symbool s^2) tussen beide gebeurtenissen. Dit interval is invariant wat in overeenstemming is met de eerste eigenschap.

Viersnelheid

Laten we nu een deeltje volgen dat zich verplaatst van plaats A naar plaats B. Hiernaast is voor twee referentiestelsels de wereldlijn van het deeltje in het minkowskidiagram getekend. In het linker diagram heeft het deeltje een snelheid v voor de waarnemer. In het rechter diagram is het deeltje voor de waarnemer in rust. De tijd voor deze waarnemer is met τ aangeduid.



Omdat het ruimte-tijdinterval invariant is, geldt:

$$(c\Delta t)^2 - \Delta x^2 = (c\Delta \tau)^2$$

Hierin is $\Delta \tau$ de tijd die verstreken is volgens de met het deeltje meebewegende waarnemer: de zogenoemde 'eigentijd'.

Omdat $\Delta x = v \cdot \Delta t$ volgt hieruit:

$$(c^2 - v^2) \cdot \Delta t^2 = c^2 \cdot \Delta \tau^2.$$

Hieruit volgt:

$$\Delta \tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \Delta t.$$

We zien hieruit dat de verstreken tijd Δt altijd groter is dan de eigentijd $\Delta \tau$.

In het algemeen geldt dat de snelheid van een deeltje berekend kan worden door zijn verplaatsing Δx te delen door de tijdsduur Δt . Als we iedere component van de verplaatsings-veervector delen door Δt , krijgen we een veervector voor de snelheid: de zogenoemde viersnelheid. We moeten hierbij echter goed nadenken over de tijdsduur waarmee je deelt. Deze tijdsduur moet invariant zijn. We willen namelijk dat de viersnelheid een veervector blijft. Een voor de hand liggende keus is daarom om te delen door de eigentijd $\Delta \tau$. De viersnelheid V wordt dan dus:

$$V = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \frac{\Delta z}{\Delta \tau} \right).$$

Merk op dat V een veervector is dankzij de eerder genoemde tweede eigenschap van veervectoren. Alle componenten delen door $\Delta \tau$ komt immers overeen met het vermenigvuldigen met een factor k .

Als we stellen dat $\Delta y = \Delta z = 0$, geldt voor de viersnelheid:

$$V = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right).$$

In deze vergelijking is v de snelheid van het deeltje in de x -richting.

De viersnelheid van het deeltje voor de meebewegende waarnemer is:

$$V' = (c, 0, 0, 0).$$

Ga na dat het inwendig product van V met zichzelf voor elke waarnemer c^2 bedraagt.

Vierimpuls

We vermenigvuldigen nu elke component van de viersnelheid met de massa m van het deeltje. We krijgen dan de viervector voor de impuls: de zogenoemde vierimpuls P . Uitgaande van de vergelijking voor V krijgen we dan:

$$P = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right).$$

Als we naar de tweede component van P kijken, herkennen we in de teller de klassieke impuls mv . De relativistische impuls is dan:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

De relativistische impuls is dus altijd groter dan de klassieke impuls. Als v veel kleiner dan c is, is de noemer praktisch 1 en gaat de relativistische impuls over in de klassieke impuls.

Als we naar de eerste component van P kijken, kunnen we daar in eerste instantie weinig betekenis aan toekennen. Als we deze eerste component echter met c vermenigvuldigen en hem vervolgens als reeksontwikkeling schrijven, krijgen we:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \frac{15}{48}m\frac{v^6}{c^4} + \dots$$

De tweede term van het rechterlid is de kinetische energie $\frac{1}{2}mv^2$ van het deeltje.

Voor alle termen geldt dat ze de eenheid van energie hebben. Ze stellen dus een bepaalde energiebijdrage voor. We nemen daarom aan dat alle termen bij elkaar de totale energie E voorstelt. De eerste component van de vierimpuls is dan dus E/c .

Voor de totale energie van het deeltje geldt dus:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Verband tussen de energie en de impuls van een deeltje

De vierimpuls kan geschreven worden als:

$$P = \left(\frac{E}{c}, p, 0, 0 \right)$$

Omdat P een viervector is, is het inwendig product van P met zichzelf invariant. Er geldt dus:

$$\left(\frac{E}{c} \right)^2 - p^2 = \left(\frac{E'}{c} \right)^2 - p'^2.$$

In het rechterlid zijn de energie en impuls voorzien van accentjes om aan te geven dat deze grootheden betrekking hebben op waarnemer W' . Als we voor W' de met het deeltje meebewegende waarnemer kiezen, geldt $p'=0$ en $E'=mc^2$. De laatste vergelijking kunnen we dan schrijven als:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Transformatie van energie en impuls tussen twee waarnemers

Stel dat twee waarnemers W en W' met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen en dat beiden een deeltje observeren. Zoals steeds beperken we ons hierbij in de ruimte tot eendimensionale situaties (geen beweging in de y - of z -richting). Voor W heeft het deeltje een energie E en een impuls p . Voor W' heeft het deeltje een energie E' en een impuls p' . Omdat de vierimpuls een viervector is, kunnen E' en p' met behulp van de lorentztransformatie uit E en p worden gevonden.

We moeten duidelijk onderscheid maken tussen twee snelheden: de snelheid van de waarnemers ten opzichte van elkaar en de snelheid van het deeltje ten opzichte van een waarnemer. Voor de transformatie van E en p naar E' en p' is de eerste snelheid van belang. Als u de snelheid van W' ten opzichte van W is, stellen we:

$$\beta = \frac{u}{c} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Door gebruikmaking van deze twee factoren, wordt de transformatie van E en p :

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta \cdot p \right) \quad \text{en} \quad p' = \gamma \left(p - \beta \cdot \frac{E}{c} \right).$$

Merk op dat deze transformatie sterk lijkt op de transformatie voor ruimte en tijd. Moment en energie zijn aan elkaar verwant als ruimte en tijd.