

Wat is teleportatie en hoe doe je dat zelf op een quantum computer. Doe dit niet thuis!

Teleportatie op de quantum computer

Quantum computeren voor beginners

Qu Antum
Edukaizen

Inhoud

Doe dit niet thuis, experimenten met teleportatie.....	2
Inleiding.....	2
Interferentie.....	3
Verstrengeling.....	4
Teleportatie van een qubit.....	5
Bepaling van de waarde van het quantumbit.....	5
Opstellen van het teleportatie quantum algoritme.....	6
Quantum gates.....	6
Cnot gate.....	7
Quantum circuit voor verstrengeling.....	8
Teleportatie circuit.....	9

Copyright Edukaizen

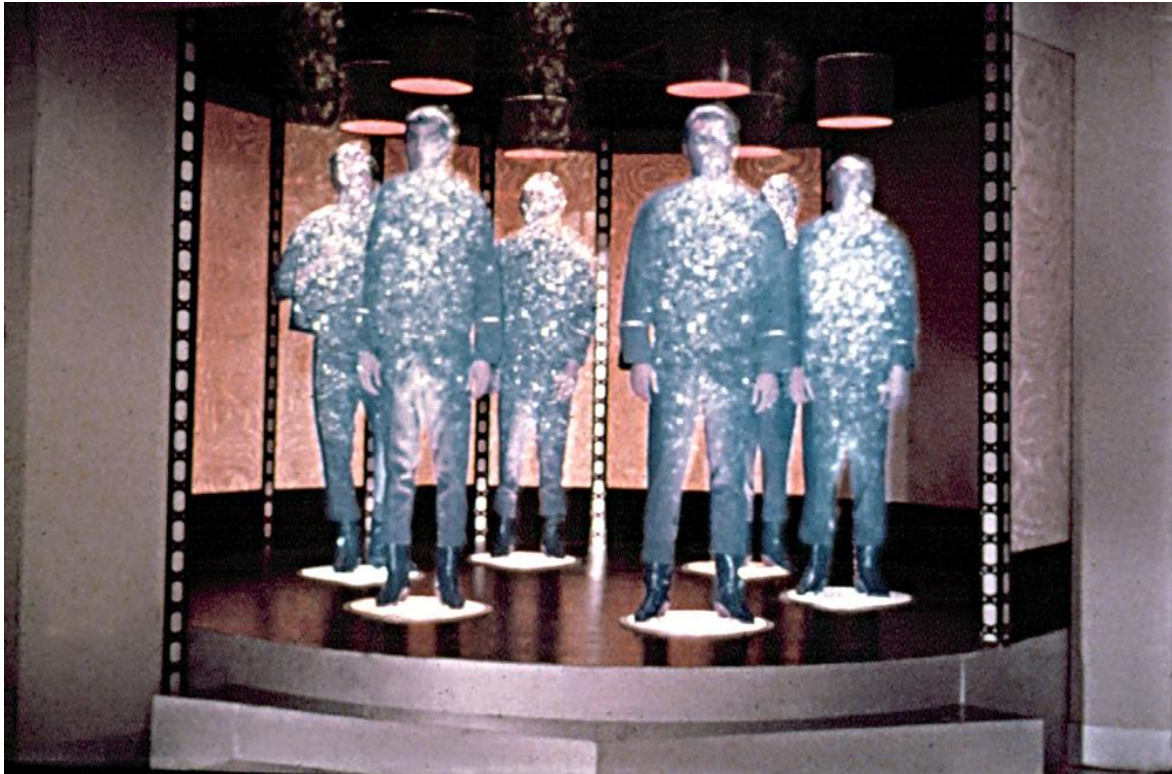
Edukaizen7@gmail.com

Bram

Doe dit niet thuis, experimenten met teleportatie.

Inleiding

Teleportatie is bekend van de kreet van captain Kirk "Beam me up scotty" uit de TV serie Star Trek. In sf verhalen is teleportatie en in Harry Potter is het begrip verschijnselen standaard wijze van vervoer. Er is tot op heden niet bekend hoe dit technisch uit te voeren. Stel je voor je gaat een mens opsplitsen in atomen en die ga je vervolgens versturen en opbouwen.



In de quantum wereld kunnen we wel teleporteren. We verplaatsen dan de informatie van een deeltje naar een andere plek. We verplaatsen dus niet een ding of deeltje zelf maar geven alleen de informatie van dat deeltje door aan een deeltje op een andere plek. Wat zou er allemaal fout kunnen gaan als je een persoon gaat teleporteren stel zijn benen komen op de plek van de armen en omgekeerd.

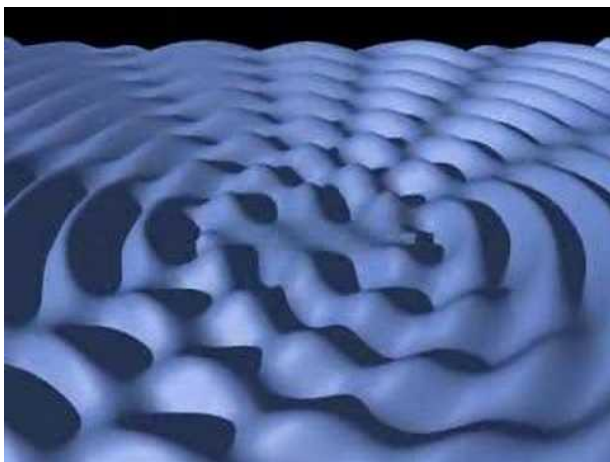
In Nederland is de kampioen teleportatie de TU Delft, zij hebben een verstrengeld deeltje aangetoond over een afstand die niemand voor mogelijk hield. Wij gaan eigenschappen van deeltjes teleporteren en daar gaan we gebruik maken van verstrengeling. Er is sprake van verstrengeling als twee deeltjes op afstand elkaar kunnen beïnvloeden. Wat is daar nou zo bijzonder aan, stel je voor dat je met een kennis gaat winkelen maar jullie besluiten allebei naar jullie favoriete game shop te gaan. In de winkel krijg je ineens de behoefte om de nieuwste fifa game te kopen. Je gaat naar de afgesproken plek en dan blijkt dat je vriend ook dezelfde game heeft gekocht. Ook quantum deeltjes kunnen invloed op elkaar uitoefenen. Einstein noemde dit verschijnsel spooky action on a distance, weet je waarom?

Wij gaan dus met behulp van de deeltjes die verstrengeld zijn informatie teleporteren. Wat voor informatie wordt hier bedoeld. Zoals je weet rekt de computer met bits. Een bit is de basis van de computer en is simpel een 0 of een 1. In de quantum

wereld gebruiken we qubits en deze quantum bits hebben veel meer mogelijkheden behalve 0 en 1 kunnen ze ook waarden hebben die tussen 0 en 1 liggen bijvoorbeeld een $\frac{1}{2}$. Ook kan een qubit of een deeltje twee toestanden hebben en is dan in superpositie toestand.

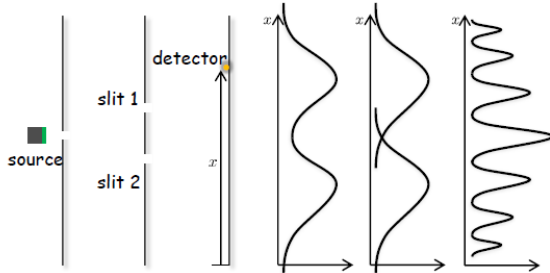
Interferentie

Hoe krijg je interferentie, stel je gaat met je vriend watergolven maken in de vijver. Je gooit tegelijkertijd stenen in de vijver en de golven gaan mengen. Sommige golven tellen op en worden de golven hoger op het andere moment worden de golven juist lager ze doven elkaar uit.



Het begrip interferentie is een fundamenteel begrip en gaat over hoe de deeltjes in de kwantumwereld zich gedragen. Interferentie van 2 golven is goed te begrijpen met het twee spleten experiment zoals in de tekening is geschetst. Stel je voor dat je watergolven door 2 spleten laat stromen. Er ontstaan dan een golf die een interferentie patroon laten zien. Het interferentie patroon ontstaat bij alle golfvormige verschijnselen. Ook als er een lichtbundel door de twee spleten worden gestuurd ontstaat er een golfpatroon, maar het opvallende is dat wanneer de lichtdeeltjes een voor een door de spleten gestuurd worden er ook een interferentie patroon ontstaat.

Double-slit experiment



$$I_1(x) = h_1(x)^2$$

$$I_2(x) = h_2(x)^2$$

$$h_{12}(x) = h_1(x) + h_2(x)$$

$$I_{12} = h_{12}^2 = (h_1(x) + h_2(x))^2$$

$$P_1(x) = |a_1(x)|^2$$

$$P_2(x) = |a_2(x)|^2$$

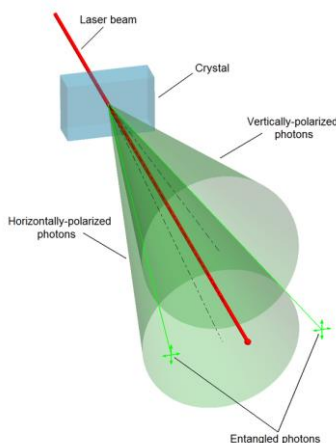
$$a_{12}(x) = a_1(x) + a_2(x)$$

Bullets	Water Waves	Photons/Electrons
Discrete	Continuous	Discrete
Prob arrival	Intensity	Prob of arrival
$P_{12} = P_1 + P_2$	$I_{12} \neq I_1 + I_2$	$P_{12} \neq P_1 + P_2$
No interference	Interference	Interference

De lichtgolven komen door 2 spleten binnen en deze golven gaan met elkaar mengen, er ontstaat interferentie. De gecombineerde golf is niet een optelsom van 2 golven maar laat een interferentiepatroon met golfhoogte $H = (h_1 + h_2)^2$ zien. Dit is het kenmerk van interferentie in het geval van golven en is vergelijkbaar met superpositie met quantum bits. Met superpositie kan de qubit in de quantum computer meer toestanden bezitten.

Verstrengeling

Verstrengeling van deeltjes ontstaat als deze deeltjes elkaar beïnvloeden zodanig dat de toestand van deze deeltjes niet onafhankelijk van elkaar beschreven kan worden.



Bron: File:SPDC figure.png - <https://en.wikipedia.org>

In de figuur zijn 2 lichtbundels weergegeven die uit een kristal komen met een bundel met verticale en een horizontale polarisatie die elkaar voor een groot deel overlappen. De fotonen in deze bundels zijn gekoppeld aan elkaar. Op de snijpunten

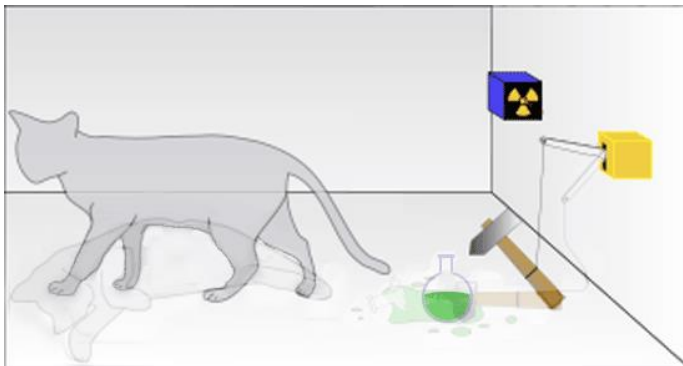
van de bundels krijgen we fotonen die V of H-polarisatie hebben, en het is dan niet te achterhalen van welke bundel de fotonen vandaan komen. Twee deeltjes die zijn verstrengeld hebben een gemeenschappelijke oorsprong en delen hun eigenschappen. De deeltjes zijn gekoppeld en deze koppeling blijft ook aanwezig als de deeltjes op grote afstand van elkaar gebracht worden bijvoorbeeld een deeltje op aarde en het andere deeltje naar Mars. In het experiment gaan wij de eigenschappen van een qubit overbrengen naar een andere qubit.

Teleportatie van een qubit

We gaan de eigenschappen van een qubit overbrengen naar een andere locatie. Wij hebben hiervoor twee virtuele lab assistenten tot onze beschikking Alice en Bob. Alice heeft een qubit die in een bepaalde superpositie toestand is. Na de afloop van het teleportatie experiment zal de qubit van Bob dezelfde toestand hebben. De toestand van de qubit van Alice is overgedragen naar de qubit van Bob via teleportatie. Teleportatie gaan we uitvoeren met de quantum computer, deze computer werkt met quantum gates en daarom gaan we een quantum circuit opzetten.

Bepaling van de waarde van het quantumbit

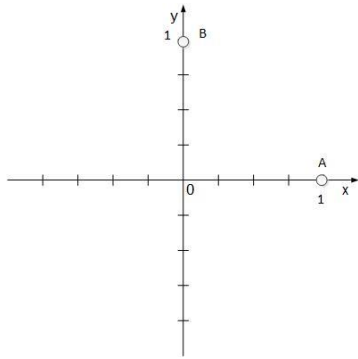
Het quantum bit kan elke waarde tussen 0 en 1 hebben en vaak ook nog eens allebei tegelijk dit wordt aangegeven met het begrip Schrödingers cat.



Bron: *File:Schrodingers cat.svg* - <https://en.wikipedia.org>

Stel je voor dat er een kat zit in een kastje met een dodelijk gas. Een quantum circuit stuurt een mechanisme aan en laat het gas vrij de kat is dood. Wij weten pas dat de kat dood is als de kast open gaat. De kat levend geven we de waarde 1 en de kat dood de waarde 0. De kans dat de kat levend of dood is allebei 50%. De uitkomst van een quantum mechanisch experiment is pas bekend na een meting.

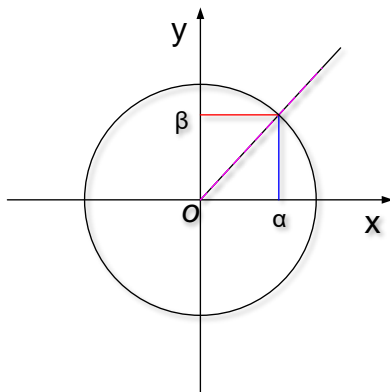
Hoe geven we de waarde van de qbit in grafiek aan. De punten A en B geven de waardes 1 en 0 aan.



Punt A heeft als positie (1,0) en geeft de waarde nul aan of als vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Punt B heeft als positie (0,1) en geeft de waarde 1 aan of als vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alle mogelijke waarden liggen op de eenheidscirkel. De straal van de cirkel heeft de waarde 1.



De toestand van een qubit wordt gerepresenteerd door een lineaire combinatie van toestanden zoals ook bij het spleten experiment was aangegeven.

$$\Psi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

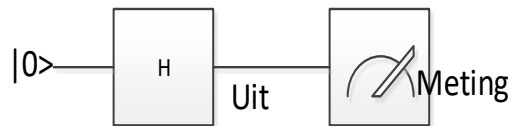
In de eenheidscirkel die hierboven is weergegeven is de kans op een nul even groot als op een 1 en zou bijvoorbeeld de situatie van Schrödingers kat kunnen voorstellen.

De kans voor het meten van een 0 wordt weergegeven door $\alpha^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = 1/2$ of 50%.

Opstellen van het teleportatie quantum algoritme.

Quantum gates.

Manipuleren van quantumbits doen we met quantumgates. De belangrijkste quantumgate is de Hadamardgate, deze gate is nodig om het qbit in een superpositiestand te brengen. Een aantal typen gates in de quantum computer werken net als in de klassieke computer maar het wordt interessant als de hadamard gate wordt gebruikt zoals in het volgende circuit.



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hadamard gate

De Hadamard transformeert de input met een functie die hier tussen haakjes staat, dit is een matrix. De waarde bij uit is eenvoudig te berekenen door de matrix te vermenigvuldigen met de input en dit schrijven we als $H|0\rangle$. Het symbool " \rangle " wordt de ket genoemd en wordt hier als een afsluithaak gebruikt dit is bedacht door Dirac.

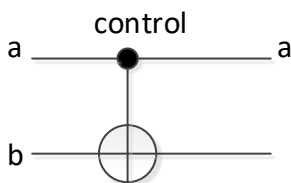
$$\text{Out} = H|0\rangle = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a * 1 + c * 0 \\ b * 1 + d * 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{Out} = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle = |+\rangle$$

De Hadamard gate geeft een superpositie toestand.

Cnot gate

De Cnot heeft een controle bit a en een target bit b.



De Cnot gate keert het b bit om wanneer a = 1

Wat wordt de nieuwe waarde van de bits aan de uitgang van de Cnot. Wanneer a = 0 is er geen verandering. Als a = 1 dan wordt b omgedraaid.

$$|00\rangle \Rightarrow |00\rangle$$

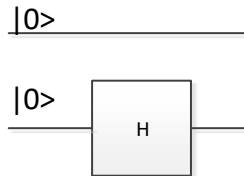
$$|01\rangle \Rightarrow |01\rangle$$

$$|10\rangle \Rightarrow |11\rangle$$

$$|11\rangle \Rightarrow |10\rangle$$

Quantum circuit voor verstrengeling

Als wij 2 qubits willen verstrengelen brengen wij eerst de qubits in een superpositie toestand. Een hadamard op 1 qubit en parallel een tweede qubit.

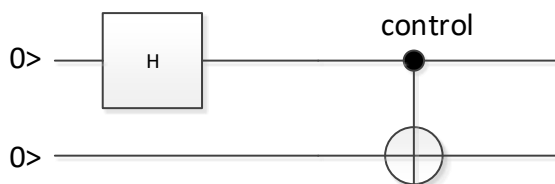


De inwerking van de twee qubits wordt beschreven met een tensorproduct. Voor de operaties op meerder qubits wordt dit tensorproduct vervangen door een zogenaamd inwendig product ofwel een gewone vermenigvuldiging. De hadamardgate geeft dan:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = |+\rangle \otimes |0\rangle = (1/\sqrt{2}|0\rangle + 1/\sqrt{2}|1\rangle) \otimes |0\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

Vervolgens sluiten we de CNOT aan.



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

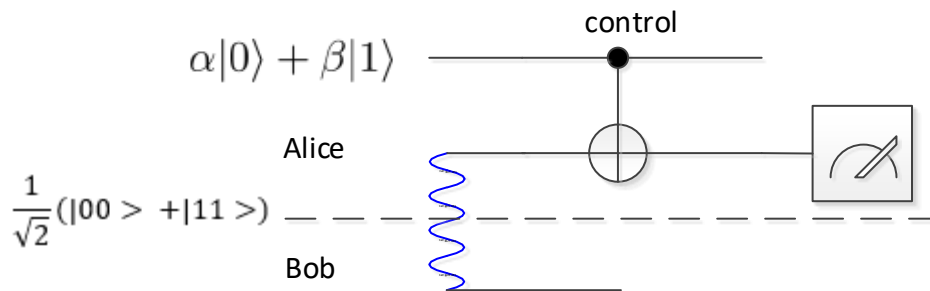
In geel is het controle bit aangegeven. Op het moment dat het controle bit 0 is dan verandert het target bit niet. Als het controle bit 1 is dan verandert het target bit van een 0 naar een 1.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Deze state is een Bell state, en deze toestand of state is niet te ontbinden in enkele qbit toestanden en is daarom niet te herleiden tot onafhankelijke qbits en zijn dan verstrengeld.

Teleportatie circuit

We kunnen dus qubits in superpositie brengen en die vervolgens verstrengelen. Deze verstrengelde toestand is precies wat er nodig is voor teleportatie. We geven Alice en Bob allebei een qbit van het verstrengelde paar.



Alice en Bob zijn op afstand van elkaar (aangegeven door de stippellijn) en hebben beiden een qbit die verstrengeld is. Er geldt dan:

$$\begin{aligned}
 & (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) \\
 &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|111\rangle
 \end{aligned}$$

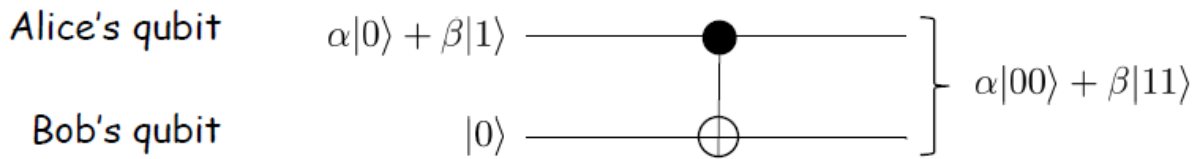
Dit is de input voor de CNOT met het eerste bit het control bit.

$$\begin{aligned}
 \text{CNOT} \rightarrow & \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|101\rangle \right) \\
 & + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|110\rangle
 \end{aligned}$$

Vervolgens gaan we het tweede bit ofwel het middelste bit van de drie meten, wat zijn dan bit 1 en 3 als het middelste bit een 0 is of een 1.

$$\begin{aligned}
 0 & \quad \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \\
 1 & \quad \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle
 \end{aligned}$$

We kunnen het circuit vervangen door het onderstaande circuit en in het geval dat dat Bob's qubit de waarde nul heeft krijgen we het volgende.



De output $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ moet gelijk worden aan $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. We gaan dan de output meten in de zogenaamde + en - basis.

$$\begin{aligned} \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle &= \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \right) \otimes |0\rangle + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \right) |1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \left[\alpha|10\rangle + \beta|11\rangle \right] + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \left[\alpha|10\rangle - \beta|11\rangle \right] \end{aligned}$$

In deze formule is in het vak weer de input te herkennen. Na een meting zal er een + of een - worden gemeten met de volgende states.

$$\begin{aligned} \oplus &: \text{New state} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha|10\rangle + \beta|11\rangle \right] = |\psi\rangle \\ - &: \text{New state} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\alpha|10\rangle - \beta|11\rangle \right] = |\psi\rangle \end{aligned}$$

In het volgende schema is het complete protocol weergegeven. Links onderin zie je dat de wijzer in het 3D bloch diagram op dezelfde positie staat als de ingangstoestand.

