

De Energie van het Vacuüm

M.A.H. Cloos, M.J.F. Klarenbeek, L. Meijer, R.E. Pool
onder begeleiding van J. de Boer, R. Dijkgraaf en E. Verlinde

08-06-2004

Samenvatting

Uit kosmologische modellen blijkt dat de kosmologische constante Λ een belangrijke invloed heeft op de expansie van het heelal. We kunnen Λ associëren met de energie van het vacuüm en waarnemingen leveren ons de energiedichtheid ervan. Wanneer we deze energiedichtheid echter theoretisch proberen te berekenen vinden we een absurd hoge waarde. Het optreden van deze discrepantie valt met geen enkele huidige theorie te verklaren.

Inhoudsopgave

1	Kosmologische achtergrond	3
1.1	De Friedmannvergelijking	3
1.2	De acceleratievergelijking	4
1.3	De toestandsvergelijking	5
1.3.1	Stof ($\omega = 0$)	5
1.3.2	Straling ($\omega = \frac{1}{3}$)	6
1.3.3	Mengsels ($0 < \omega < \frac{1}{3}$)	6
1.4	De kromming van het heelal	6
1.5	De dichtheidsparameter Ω	7
2	De waarneming van vacuümenergie	9
2.1	De kosmologische constante	9
2.2	Vacuümenergie	10
2.3	Afstandsbepalingen	11
2.3.1	Type 1A supernova's	11
2.3.2	De Sloan Digital Sky Survey	11
2.3.3	Wilkinson Microwave Anisotropy Probe	12
2.3.4	Conclusie	12
3	Berekening van de vacuümenergie	14
3.1	Het Casimireffect	14
3.2	De energiedichtheid van het vacuüm	15
3.3	Roosterwereld	16
3.4	Dimensiebeschouwing	17
4	Conclusie	19

1 Kosmologische achtergrond

Aan de hand van waarnemingen van roodverschuivingen in het spectrum van verafgelegen sterrenstelsels is vastgesteld dat het heelal uitdijt. Uitgaande van de theorie dat het heelal ontstaan is tijdens de Big Bang, lijkt dat niet zo vreemd. Maar bedenkend dat vanaf de Big Bang de massa binnen het heelal voortdurend zwaartekracht heeft uitgeoefend, zou men verwachten dat het uitdijen van het heelal vertraagt. Uit recente waarnemingen blijkt dat dit niet het geval is maar dat het heelal juist versneld uitdijt. Er moet dus een soort anti-zwaartekracht aan het werk zijn in het heelal, een donkere (niet direct waarneembare) energie die het doet uitdijen. Het tamelijk algemeen geaccepteerde model van het huidige heelal stelt dat vijf procent van het heelal bestaat uit gewone zichtbare materie, vijftwintig procent bestaat uit zogenaamde donkere materie en zeventig procent uit bovengenoemde donkere energie, die we zullen associëren met de energie van het vacuüm. Om begrip te krijgen van de huidige methoden om kosmologische modellen te construeren zullen we eerst een paar belangrijke vergelijkingen introduceren. Aan de hand hiervan zal het bestaan van de kosmologische constante worden verondersteld, waarna we deze zullen koppelen aan het verschijnsel van vacuümenergie.

1.1 De Friedmannvergelijking

De Friedmannvergelijking beschrijft de expansie van het heelal en is hiermee de belangrijkste vergelijking binnen de kosmologie. Deze vergelijking komt voort uit de Algemene Relativiteitstheorie maar kan ook aan de hand van Newtoniaanse mechanica worden begrepen. We zullen hiermee een korte afleiding geven van de Friedmannvergelijking.

Op basis van het kosmologisch principe beschouwen we een heelal uniform gevuld met een materiaal met dichtheid ρ . Omdat dit heelal er vanuit elk punt hetzelfde uitziet, kunnen we elk punt als middelpunt beschouwen. Beschouw een massa m op een afstand r van dit centrum. Dit deeltje voelt alleen zwaartekracht van alle massa binnen de bol met straal r om het middelpunt.

Dit is dus gelijk aan:

$$F_z = \frac{GMm}{r^2} = \frac{Gm}{r^2} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4\pi G\rho r m}{3}$$

De gravitationele potentiële energie V en de kinetische energie T van het deeltje zijn:

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3} \quad \text{en} \quad T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

Er moet energiebehoud gelden, $U \equiv T + V$ constant. Ofwel:

$$U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi G\rho r^2 m}{3} \quad (1)$$

We gaan nu over op meebewegende coördinaten:

$$\vec{r} \equiv a(t)\vec{x}$$

waarbij a (de schaalfactor) alleen een functie is van t dankzij de aanname van homogeniteit. Substitutie hiervan in vergelijking (1) geeft: (met $\dot{x} \equiv 0$)

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho a^2 x^2 m$$

We kunnen dit herschrijven tot:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (2)$$

Dit is de Friedmannvergelijking met $k \equiv \frac{-2U}{mx^2}$. Omdat de totale energie U behouden moet zijn en x per definitie niet van de tijd afhangt (daar is het $a(t)$ deel voor), is k een constante. Deze blijkt de eenheid $lengte^{-2}$ te hebben. k is de krommingsparameter, en hangt samen met de kromming van de ruimte.

1.2 De acceleratievergelijking

We kunnen ook kijken hoe expansie wordt beschreven binnen de theorie van de thermodynamica. Dit geeft (zonder afleiding) de volgende vergelijking voor de tijdsontwikkeling van de dichtheid binnen het heelal:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (3)$$

We zullen deze vergelijking aanduiden als de vloeistofvergelijking. Het is belangrijk om erbij stil te staan dat wanneer we het over massadichtheid hebben, we meteen ook de energiedichtheid beschouwen volgens $E = mc^2$. Met deze vergelijking en de Friedmannvergelijking is het mogelijk een derde belangrijke vergelijking samen te stellen waarmee we de versnelling van de expansie kunnen onderzoeken. We differentiëren hiervoor de Friedmannvergelijking naar de tijd en krijgen zo:

$$2\frac{\dot{a}}{a}\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + 2\frac{k\dot{a}}{a^3}$$

Vullen we $\dot{\rho}$ uit vergelijking (3) hierin in, dan volgt:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G(\rho + p) + \frac{k}{a^2}$$

En door voor $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ weer de rechterkant van de Friedmannvergelijking in te vullen, volgt uiteindelijk:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (4)$$

Dit is de acceleratievergelijking. Merk op dat deze onafhankelijk is van de waarde van k .

1.3 De toestandsvergelijking

We hebben nu drie vergelijkingen gezien, die we kunnen gebruiken om de expansie van het heelal te onderzoeken. Om hiertoe de Friedmannvergelijking op te lossen kunnen we hierin ρ invullen door deze uit de vloeistofvergelijking te vinden. We moeten dan echter wel de relatie tussen druk en dichtheid weten. Dit noemen we de toestandsvergelijking, $p \equiv p(\rho)$. In het algemeen is deze van de vorm $p = \omega\rho$. De waarde van ω is afhankelijk van waarmee het heelal gevuld is. Twee mogelijkheden die we hier zullen behandelen zijn (niet-relativistische) materie en straling, een derde mogelijkheid die we associëren met vacuümenergie volgt later.

1.3.1 Stof ($\omega = 0$)

Stof is de verzamelnaam voor materie die een verwaarloosbare druk uitoefent, $p = 0$. Dit geldt in goede benadering voor de waarneembare materie in het heelal.

Onder aanname van $p = 0$ wordt de vloeistofvergelijking:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0$$

oftewel $\rho \propto \frac{1}{a^3}$. Dit zegt simpelweg dat de dichtheid afneemt evenredig met het toenemende het volume. Geven we de huidige dichtheid aan met ρ_0 en stellen we de huidige waarde van a op 1, dan geldt $\rho = \frac{\rho_0}{a^3}$.

De Friedmannvergelijking wordt nu:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^3} - \frac{k}{a^2} \quad (5)$$

Of, als we ons beperken tot $k = 0$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{1}{a}$$

De oplossing hiervan is $a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$, met $a(t = 0) = a(t_0) = a_0 = 1$. De vergelijking voor ρ wordt dan:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}$$

Aangezien $\dot{a} > 0$ zal dit heelal eeuwig blijven uitdijen, maar wel steeds langzamer:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad (6)$$

1.3.2 Straling ($\omega = \frac{1}{3}$)

Straling voldoet aan $p = \frac{1}{3}\rho$, wat als vloeistofvergelijking levert:

$$\dot{\rho} = 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0$$

De oplossing hiervan is $\rho \propto \frac{1}{a^4}$, waaruit volgt:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{en} \quad \rho(t) = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2}$$

$a(t)$ is hier kleiner dan voor het $\omega = 0$ geval, dus dit heelal zet minder snel uit.

1.3.3 Mengsels ($0 < \omega < \frac{1}{3}$)

Als het heelal gevuld is met een mengsel van stof en straling geldt voor de totale dichtheid $\rho = \rho_{stof} + \rho_{straling}$. Het gedrag van de vergelijkingen ligt eraan welke van de twee overheerst.

Aangezien de dichtheid van stof tijdens de expansie van het heelal afneemt met $\rho \propto \frac{1}{a^3}$ en de dichtheid van straling met $\rho \propto \frac{1}{a^4}$, zal de bijdrage van straling aan de totale dichtheid van het heelal steeds geringer worden. Er is aan te tonen dat deze bijdrage in het huidige heelal vrijwel verwaarloosbaar is ten opzichte van die van de dichtheid van stof.

1.4 De kromming van het heelal

Voor de toekomstige ontwikkeling van het heelal zijn in principe twee mogelijkheden: het heelal kan eeuwig blijven uitdijen, of de uitdijning kan op een bepaald moment stoppen waarna het weer in zal krimpen.

Als de uitdijning van het heelal zou stoppen, komt dit overeen met $\dot{a} = 0$, ofwel $H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = 0$. Kijken we nogmaals naar de Friedmannvergelijking:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (7)$$

dan komt dit dus overeen met

$$\frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} = 0. \quad (8)$$

Als $k < 0$ kan dit niet gelijk aan nul zijn, dus zo'n heelal blijft eeuwig uitdijen. ρ valt af als $\frac{1}{a^3}$ (we gaan uit van een heelal dat alleen stof bevat),

dus na een lange tijd zal de k -term overheersen. De Friedmannvergelijking wordt dan:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}$$

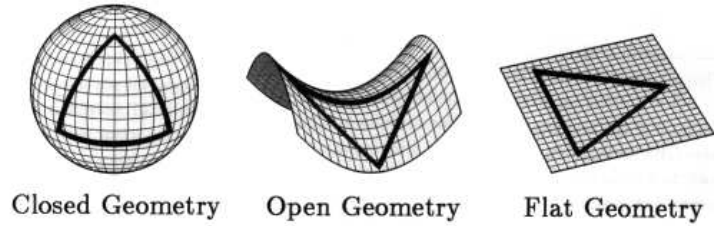
Of, na het wegdelen van de term a^2 aan weerszijden:

$$\dot{a}^2 = -k,$$

waaruit dus volgt dat $a \propto t$, ofwel een constante uitdijingssnelheid voor grote t .

Als $k > 0$ kan de vergelijking wel nul worden, sterker nog, dit is dan onvermijdelijk aangezien de k -term minder snel afneemt dan de ρ -term, en ze dus op een gegeven moment gelijk zullen zijn. Een heelal met positieve k zal dus stoppen met uitzetten en weer inkrimpen.

De gevallen eeuwige uitdijing met k negatief en opnieuw inkrimpen met k positief komen overeen met een totale energie van het heelal die respectievelijk positief en negatief is.



Weergave van een driehoek in een tweedimensionale gesloten, open en vlakke ruimte.

1.5 De dichtheidsparameter Ω

De waarde van k bepaalt de toekomstige ontwikkeling van het heelal, waarbij een positieve waarde zorgt voor een eindige uitzetting, en een negatieve waarde voor een onbeperkte uitdijing. Voor de waarde hier precies tussenin, $k = 0$, zal het heelal in het oneindige stoppen met uitdijen. Voor $k = 0$ wordt de Friedmannvergelijking:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (9)$$

Deze waarde van ρ noemen we de kritische dichtheid ρ_c . Dit is dus de dichtheid waarbij het heelal nog net blijft uitdijen. De huidige waarde van ρ_c —aangegeven in termen van de de Hubble constante h met bijbehorende onzekerheid— bedraagt $1.88 h^2 \times 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$. Uitgedrukt in zonsmassa's per megaparsec komt dit overeen met $2.78 h^{-1} \times 10^{11} M_\odot / (h^{-1} \text{ Mpc})^3$; omdat we weten dat een melkwegstelsel typisch uit honderd miljard sterren

bestaat en een volume heeft in de orde van grootte van één megaparsec, kan de werkelijke waarde van ρ niet ver van ρ_c af liggen.

Het is daarom handig om te werken met de dichtheidsparameter Ω , gedefinieerd als de verhouding tussen de werkelijke en kritische dichtheid:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \tag{10}$$

Voor $k = 0$ geldt dus $\Omega = 1$. De huidige waarde wordt aangegeven met Ω_0 . Het is ook mogelijk de dichtheid te splitsen in componenten voor de verschillende soorten materie, dus een Ω_{stof} en een $\Omega_{straling}$.

2 De waarneming van vacuümenergie

We hebben nu voldoende middelen om expansiemodellen van het heelal te kunnen onderzoeken. Hiermee kunnen we de consequenties onderzoeken van een opmerkelijke recente waarneming: de expansie van het heelal versnelt! We zullen nu aannemelijk maken dat dit gegeven een belangrijke aanwijzing is voor het bestaan van vacuümenergie.

2.1 De kosmologische constante

Einstein ging uit van een statisch heelal. Deze veronderstelling zette hem aan tot het invoeren van de kosmologische constante Λ . Met deze constante krijgen de hiervoor beschouwde vergelijkingen de volgende vorm:

Friedmannvergelijking \rightarrow

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (11)$$

Acceleratievergelijking \rightarrow

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (12)$$

Willen we hiermee een statisch heelal beschrijven dan moeten de snelheid en de versnelling in bovenstaande vergelijkingen beide nul zijn. Uit de acceleratievergelijking volgt dan voor een door materie gedomineerd heelal ($p = 0$):

$$\frac{4\pi G}{3}\rho = \frac{\Lambda}{3}$$

Om hieruit een realistische oplossing te verkrijgen moet de dichtheid een positieve waarde ongelijk aan nul hebben. Dit bracht Einstein ertoe de kosmologische constante Λ in te voeren.

We weten tegenwoordig dat het heelal allerminst statisch is. Gezien het uitdijen van het heelal zou de kosmologische constante op het eerste gezicht dus achterwege gelaten kunnen worden, waardoor de acceleratievergelijking weer zijn oude vorm krijgt:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (13)$$

Uit waarnemingen blijkt echter dat het heelal *versneld* uitdijt. Hieruit volgt:

$$-\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) > 0 \quad \Rightarrow \quad \rho + 3p < 0 \quad \Rightarrow \quad p < -\frac{1}{3}\rho \quad (14)$$

We hebben al gezien dat de druk van materie nul is en dat straling een druk heeft van $\frac{1}{3}\rho$. Een heelal samengesteld uit alleen materie en straling kan

dus nooit versneld uitdijen; er moet nog een component bijdragen aan de dichtheid binnen het heelal, en wel een met *negatieve druk*.

Als we de dichtheid en druk van deze component noteren als ρ_Λ en p_Λ , respectievelijk, dan kunnen we hiermee de kosmologische constante herintroduceren:

$$-\frac{4\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda + 3(p + p_\Lambda)) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

waaruit volgt

$$\rho + \rho_\Lambda + 3(p + p_\Lambda) = \rho + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi G} \quad \Rightarrow \quad \rho_\Lambda + 3p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{4\pi G} \quad (15)$$

Hieruit kunnen we de toestandsvergelijking voor de kosmologische constante halen door een definitie van de dichtheid te vinden. Dit doen we door de Λ -term in de Friedmannvergelijking te schrijven als een extra component van de dichtheid:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}$$

waaruit volgt dat

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (16)$$

Door deze uitdrukking vervolgens in (30) in te vullen vinden we de toestandsvergelijking

$$\rho_\Lambda + 3p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{4\pi G} = -2\rho_\Lambda \quad \Rightarrow \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda \quad (17)$$

2.2 Vacuümenergie

Door de negatieve druk in de toestandsvergelijking van Λ is het mogelijk de waargenomen versnelling van het heelal met de acceleratievergelijking te beschrijven. Een opmerkelijk gevolg van de negatieve druk is dat bij het uitzetten van het heelal de dichtheid ρ_Λ constant kan blijven. Er wordt dan namelijk arbeid op Λ verricht in plaats van door Λ .

Dit is een reden om te gaan vermoeden dat ρ_Λ de energiedichtheid van het vacuüm vertegenwoordigt. Kunnen we ons immers iets anders dan lege ruimte voorstellen dat bij uitzetten een constante dichtheid behoudt? Al enkele decennia wordt vermoed dat het vacuüm een bepaalde energie kan vertegenwoordigen, maar alleen op de reusachtige schaal van de kosmologie heeft deze energie duidelijk merkbare gevolgen.

Naast de combinatie van stof en straling hebben we nu ook de bijdrage van de vacuümenergie aan de totale dichtheid van het heelal. De ontwikkeling van een model, beschreven door eerder besproken vergelijkingen, hangt af van het aandeel van ρ_Λ in deze totale dichtheid. We zullen in het vervolg

deze verhouding weergeven door Ω_M en Ω_Λ , de dichtheidsparameters van respectievelijk stof en vacuümenergie (—zoals gezegd is het effect van straling op de expansie van het huidige heelal te verwaarlozen).

2.3 Afstandsbepalingen

Om de verhouding tussen Ω_M en Ω_Λ weer te geven, moeten we de grootte van de acceleratie van het heelal meten. De snelheid van zeer ver verwijderde objecten kunnen we meten door hun roodverschuiving, maar om vervolgens een beeld te krijgen van de expansie van het heelal moet ook hun afstand bekend zijn.

Afstandsbepalingen zijn vaak gebaseerd op 'standard candles', objecten waarvan de intrinsieke helderheid bekend is, omdat deze voor alle objecten van die soort ongeveer gelijk is, of te bepalen is uit andere observaties. Hierdoor kan uit de gemeten flux de afstand van deze objecten bepaald worden.

Er zijn een aantal projecten die dit soort afstandsbepalingen verrichten.

2.3.1 Type 1A supernova's

Er zijn twee typen supernova's. Een type 1 supernova is een supernova van een ster in een binair systeem, terwijl een type 2 supernova een supernova is van een losse ster. Type 1 supernova's kunnen weer onderverdeeld worden in drie subcategorieën, namelijk A, B en C. Type 1A supernova's hebben sterke siliciumlijnen in het spectrum bij maximale helderheid. Type 1B niet hebben deze lijnen niet, maar wel sterke heliumlijnen en type 1C supernova's hebben geen van beide.

Type 1A supernova's worden vaak gebruikt in afstandsbepalingen. Dit is mogelijk, omdat dit soort supernova's niet alleen een zeer grote lichtkracht heeft, maar ook een goed te iken lichtkromme. Deze is aan de hand van metingen aan relatief dichtbijgelegen nova's bepaald en kan (met een aantal correctiefactoren) gebruikt worden voor verder weg staande objecten.

Met deze metingen kan de lichtkrachtafstand van de supernova's als functie van de geometrie van het heelal bepaald worden. De metingen gaven echter aan, dat de supernova's zwakker waren dan werd verwacht op basis van de theorie. Schijnbaar stonden ze verder weg dan de roodverschuiving aangaf, wat zou impliceren dat het heelal vroeger minder snel uitdijde, i.p.v. sneller, zoals toen nog werd aangenomen. Een bijstelling van het kosmische model was dus nodig: $\Lambda \neq 0$. Specifieker gaven de metingen de waarde $\Omega_\Lambda = 0,7$.

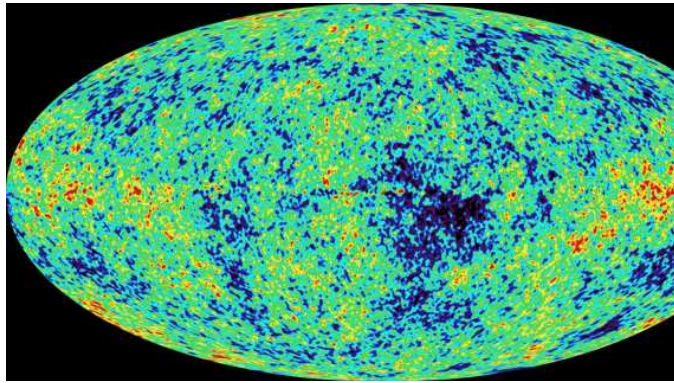
2.3.2 De Sloan Digital Sky Survey

De Sloan Digital Sky Survey (SDSS) is een gemeenschappelijk project van een aantal universiteiten en onderzoeksinstituten. De hoofd-telescoop is

2,5 meter breed. Electronische sensoren zetten licht om in data. De telescoop gebruikt ook twee spectograven om de samenstelling en afstand van objecten te bepalen. Het uiteindelijke doel van het project is om een kwart van de hemel af te gaan, en daarbij de afstand tot meer dan een miljoen sterrenstelsels en quasars te bepalen.

Uit zulke metingen van sterrenstelsel-clusters is een waarde voor de materiedichtheid van $\Omega_M = 0.3$ geëxtrapoleerd, wat wil zeggen dat de waargenomen (zichtbare) materie duidelijk niet genoeg is om de bewegingen van de clusters te verklaren.

2.3.3 Wilkinson Microwave Anisotropy Probe



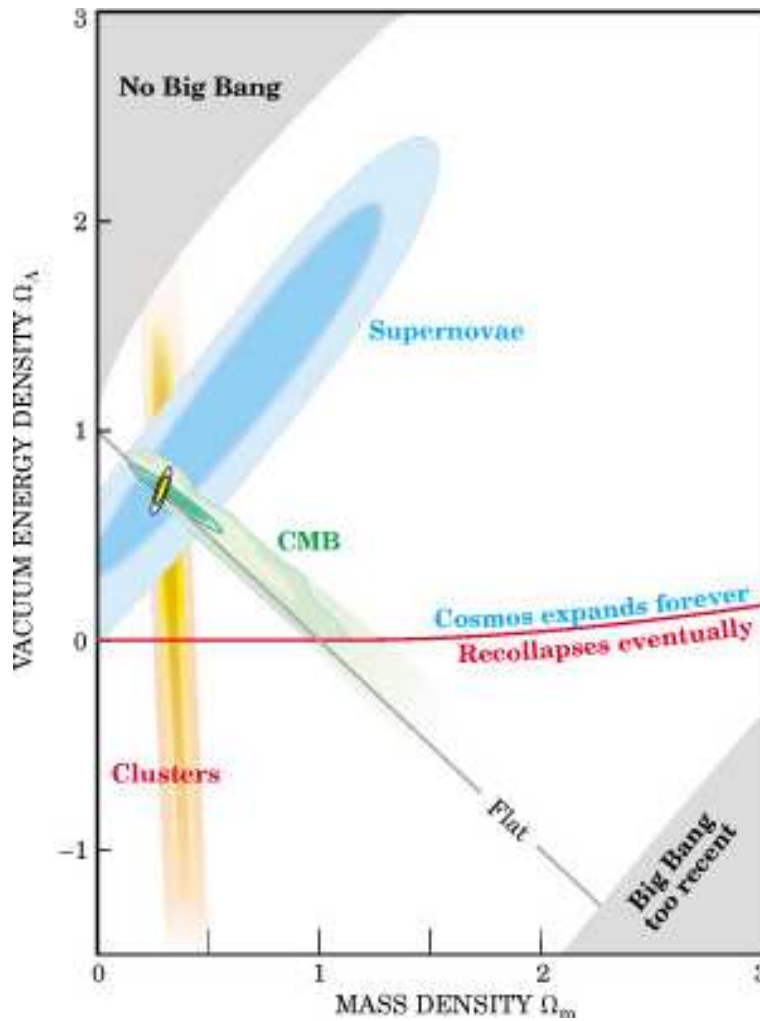
De uitkomst van de WMAP. De kleurverschillen geven fluctuaties in de kosmische achtergrondstraling weer.

De Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) is een project van onder andere de NASA. De satelliet, gelanceerd in 2001, meet de kosmische achtergrondstraling en kleine fluctuaties daarin (van de orde van grootte van 10^{-5}). De temperatuurverdeling van de achtergrondstraling geven informatie over de massaverdeling in het heelal op vroegere tijdstippen, en kan waardevolle inzichten geven over de huidige massaverdeling.

Uit metingen van de achtergrondstraling is naar voren gekomen dat het heelal bij goede benadering 'vlak' is, in de zin dat $k = 0$. Dit komt overeen met $\rho \approx \rho_c$, oftewel $\Omega (= \Omega_M + \Omega_\Lambda) \approx 1$. Overigens is er geen theoretische reden waarom Ω ongeveer 1 zou moeten zijn, dus is dit ofwel een opmerkelijk toeval, of een reden om de theorie hierachter nader te onderzoeken.

2.3.4 Conclusie

Deze drie metingen bepalen ieder apart (binnen een onzekerheidsgebied) de parameters Ω_Λ en Ω_M , maar laten nog een groot aantal kosmologische modellen toe; echter, als ze gecombineerd worden blijft er nog maar een klein deelgebied over, zoals geïllustreerd in de figuur op de volgende pagina.



Gemeten verhoudingen tussen Ω_Λ en Ω_M . Het omlijnde gedeelte waar de drie metingen elkaar snijden is de meest waarschijnlijke configuratie.

Uit deze geobserveerde verhouding tussen Ω_Λ en Ω_M kunnen we een waarde geven aan ρ_Λ : de energiedichtheid van het vacuüm blijkt een waarde te hebben in de orde van grootte van 10^{-8} . In de volgende sectie zullen we proberen deze waarde theoretisch af te leiden.

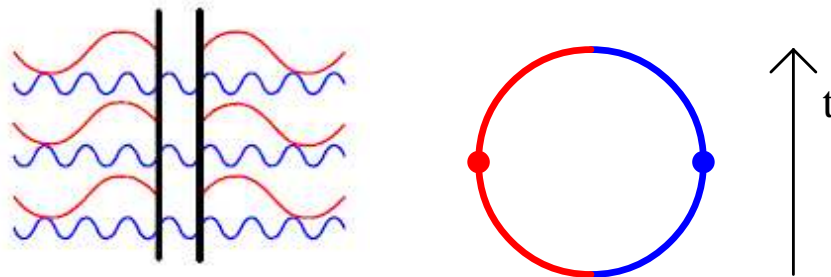
3 Berekening van de vacuümenergie

3.1 Het Casimireffect

De energie van het vacuüm kan niet direct gemeten worden. Wel kunnen we een indirect effect ervan meten: dit is het zogeheten Casimireffect. Het Casimireffect werd voorspeld door de Nederlandse wetenschapper Hendrik Casimir in 1948, en negen jaar later bevestigd door M.J. Sparnaay van het Philips natuurkundig laboratorium in Eindhoven. Het kan worden aangetoond door twee metalen platen heel dicht bij elkaar te laten komen in een vacuüm: er blijkt dan een kleine kracht te zijn die ze naar elkaar toe trekt.

Deze kracht is recht evenredig met de oppervlakte van de platen en omgekeerd evenredig met de vierde macht van de afstand tussen de platen.

Het stochastische elektrodynamische model kan dit eenvoudig verklaren. Als de metalen platen dichter bij elkaar komen, dan passen er steeds minder golven van verschillende golflengten tussen de platen. Buiten de platen zijn er dus meer golven van verschillende lengten. Het verschil in beschikbare golflengten veroorzaakt een drukverschil dat de platen naar elkaar toe drukt.



Links: het stochastische elektrodynamische model van het Casimireffect. Rechts: het ontstaan en annihileren van een deeltjespaar in het vacuüm, waarbij rood en blauw een deeltje en zijn anti-deeltjes voorstellen.

Dit gegeven kan ook verklaard worden met het quantumveldenmodel. In dit model ontstaan er continu paren van deeltjes door toedoen van de onzekerheidsrelatie met betrekking op energie en tijd. Uit het vacuüm ontstaan een deeltje en zijn antideeltje, die even later weer annihileren. Het bestaan van deze deeltjes heeft een effect op de deeltjes in de platen zoals beschreven in het Casimireffect.

3.2 De energiedichtheid van het vacuüm

Het Casimireffect zoals beschreven in de vorige paragraaf beschrijft het effect van de vacuümenergie in 2 dimensies. Het is mogelijk om met behulp van de quantumveldentheorie een uitdrukking te geven voor de energie van het veld tussen deze platen. Als we dit idee nu generaliseren naar 4 dimensies door in elke ruimtelijke richting 2 parallele platen te plaatsen dan krijgen we een doos met daarin een vrij veld.

Vanuit de veldentheorie kan een uitdrukking voor de actie van een vrij veld $\varphi(x, y, z, t)$ als volgt worden weergegeven:

$$\int \int_0^d \int_0^d \int_0^d \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(c \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(c \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz dt \quad (18)$$

Voor dit veld moet worden voldaan aan de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} \varphi(0, y, z, t) &= \varphi(d, y, z, t) = 0 \\ \varphi(x, 0, z, t) &= \varphi(x, d, z, t) = 0 \\ \varphi(x, y, 0, t) &= \varphi(x, y, d, t) = 0 \end{aligned}$$

Dit komt overeen met een gesloten doos, met daarbinnen een veld dat op de wanden nul is. De oplossing kan gevonden worden door een Fourierexpansie van φ die aan deze randvoorwaarden voldoet,

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{k,l,m} \varphi_{k,l,m}(t) \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d}z\right) \quad (19)$$

waarbij over k , l , en m voor integere waarden van 1 naar ∞ wordt gesommeerd. Voor het gemak definiëren we $\vartheta_{k,l,m}(x, y, z, t)$ nu als volgt:

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{k,l,m}^N \vartheta_{k,l,m}(x, y, z, t)$$

Vervolgens vullen we dit in en komen tot de uitdrukking

$$\int_0^d \int_0^d \int_0^d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx dy dz = \int_{x,y,z=0}^d \left(\sum_{k,l,m}^N \frac{\partial \vartheta_{k,l,m}}{\partial x} \right)^2 dx dy dz,$$

$$\frac{\partial \vartheta_{k,l,m}}{\partial x} = \varphi(x, y, z, t) = \sum_{k,l,m}^N \varphi_{k,l,m}(t) \omega_k \cos\left(\frac{k\pi}{d}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{d}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d}z\right)$$

waarin $\omega_k = \frac{k\pi}{d}$.

Door gebruik te maken van de orthogonaliteit van ϑ vallen de sinustermen

weg uit de berekening,

$$\int_{x,y,z=0}^d \vartheta_{k,l,m}^* \vartheta_{h,i,j} dx dy dz = \left(\frac{d}{2}\right)^3 \varphi_{k,l,m}^2 \delta_{kh} \delta_{li} \delta_{mj}$$

en simpelweg invullen levert:

$$\int_0^d \int_0^d \int_0^d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dx dy dz = \left(\frac{d}{2}\right)^3 \sum_{l,k,m}^N \varphi_{k,l,m}^2 \omega_k^2$$

Hiermee gaat vergelijking (18) over vergelijking (20). Deze is equivalent aan de actie van een harmonische oscillator.

$$\left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{1}{2} \sum_{l,k,m}^N \int \left[\left(\frac{\partial \varphi_{k,l,m}}{\partial t}\right)^2 - \varphi_{k,l,m}^2 c^2 (\omega_k^2 + \omega_l^2 + \omega_m^2) \right] dt \quad (20)$$

De actie van een harmonische oscillator kunnen we ook schrijven als

$$\int \left[\overbrace{\frac{m\dot{x}^2}{2}}^{kin} - \overbrace{\frac{m\omega^2 x^2}{2}}^{pot} \right] dt \quad (21)$$

Dit is equivalent aan het deel binnen de som van vergelijking (20). De grondtoestand van een van deze oscillatoren $x = \varphi$ is gelijk aan $\frac{\hbar\omega}{2}$. Nu hebben we een som over alle mogelijke verschillende oscillatoren. De grondenergie van het veld wordt dus gegeven door de som over de grondenergieën van de verschillende oscillatoren:

$$E_0 = \sum_{k,l,m=1}^N \frac{c\hbar\sqrt{\omega_k^2 + \omega_l^2 + \omega_m^2}}{2} = \sum_{k,l,m}^N \frac{c\hbar\pi\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}}{2d}$$

Als we geen minimumgolflengte definiëren zijn er dus oneindig veel verschillende golflengten tussen de randen mogelijk, waardoor de totale energie oneindig wordt. In de quantumvelden-theorie wordt dit opgelost door middel van renormalisatie. Hiermee wordt een eindig antwoord verkregen door het deel dat naar oneindig gaat weg te nemen zonder de fysische eigenschappen aan het antwoord te onttrekken. Een voorbeeld hiervan is zetafunctie-regularisatie.

3.3 Roosterwereld

Er is nog een methode om tot een eindig antwoord te komen, namelijk door middel van een 'cutoff'. Dit kan door een minimum golflengte te introduceren. Van uit de huidige natuurkunde is de meest voor de hand

liggende minimumlengte de plancklengte. Dit is de lengte ℓ_p die geconstrueerd kan worden uit de drie fundamentele natuurconstanten \hbar , c en G als $\ell_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \simeq 10^{-35}m$. Deze lengte blijkt een bijzondere betekenis te hebben. De energie van een golf wordt gegeven door $\hbar\omega = \frac{\hbar k 2\pi}{\lambda}$ door gebruik te maken van $E = mc^2$. Door vervolgens k gelijk te stellen aan c kan de golflengte geschreven worden als $\lambda = \frac{h}{mc}$. De ontsnappingssnelheid wordt gegeven door $\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$. We kiezen de snelheid gelijk aan de lichtsnelheid en lossen de vergelijking op naar r waardoor we voor de Schwarzschildstraal $r = \frac{2GM}{c^2}$ vinden. Hierbij is M de massa die ook in de vergelijking voor λ voorkomt. Door de Schwarzschildstraal gelijk te stellen aan de golflengte kan m worden opgelost:

$$m = \sqrt{\frac{\hbar c}{2G}}$$

Hieruit volgt dat $\lambda = \frac{h}{\sqrt{\frac{c\hbar}{2G}}} = \sqrt{\frac{2\hbar G}{c^3}} \simeq \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$. De plancklengte is dus de lengte waarbij de comptongolflengte van een deeltje gelijk is aan de Schwarzschildstraal van zijn massa. Aan kleinere lengtes dan de plancklengte kan met behulp van de huidige theorieën geen betekenis gegeven worden. Het aantal mogelijke golflengten per dimensie N kunnen we nu schrijven als $N = \ell_p^{-1} \simeq 10^{35}$. We kijken nu opnieuw naar de uitdrukking voor de grondenergie van het veld:

$$E_0 = \sum_{k,l,m}^N \frac{c\hbar\pi\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}}{2d} \leq \sum_{k,l,m}^N \frac{c\hbar\pi(k + l + m)}{2d} \quad (22)$$

De energiedichtheid kan nu berekend worden door d in (22) gelijk te stellen aan 1 en gebruik te maken van de equivalentie

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N \dots (n + p + \dots) = \gamma N^{\gamma-1} \frac{N(N+1)}{2} \quad (23)$$

voor het product van γ sommaties. Hiermee bekijken we dus de energie van een vrij veld in een kubieke meter en vinden zo een energiedichtheid van

$$E_0 = \frac{c\hbar\pi}{4} 3N^3(N+1) \simeq 10^{114} J m^{-3}$$

3.4 Dimensiebeschouwing

We hebben zojuist een theoretische waarde gevonden voor de vacuümenergie in de orde van grootte van 10^{114} . Eerder zagen we echter dat de waargenomen waarde een orde van grootte heeft van 10^{-8} . Een verschil van 122 machten van tien! Er lijkt hier sprake te zijn van een rekenfout, maar bij nadere beschouwing blijkt de reusachtige theoretische waarde die we voor

de vacuüm-energie vinden niet zo absurd als we misschien zouden denken. We hebben zojuist de plancklengte ℓ_p afgeleid uit de natuurconstanten G , \hbar en c . We zagen dat de gevonden lengte ook daadwerkelijk een fysische betekenis had. Dit is geen toeval: de ervaring leert ons dat wanneer we grootheden schrijven als een unieke combinatie van deze drie fundamentele constanten, ze hierin uitgedrukt een waarde krijgen die erg dicht in de buurt ligt van een nauwkeurige berekening van de betreffende grootte. Dit is de reden dat we in natuurkundige relaties nooit dimensieloze factoren aantreffen verder dan een paar ordes van grootte verwijderd van één. Laten we nu eens kijken hoe een energiedichtheid eruit ziet wanneer we deze uitdrukken in deze constanten. We weten:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$$

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \frac{kg m^2}{s}$$

$$c = 3.00 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

De energiedichtheid van de kosmologische constante moet natuurlijk dimensie $J m^{-3}$ hebben. Het is snel te zien dat $\hbar c$ een dimensie $\frac{kg m^3}{s^2} = J m$ heeft. Omdat we de plancklengte ℓ_p al hebben afgeleid hoeven we deze uitdrukking dus enkel nog vier keer te delen door $\ell_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$. Hierdoor vinden we een energiedichtheid beschreven door $\frac{c^7}{G^2\hbar}$, met een grootte van $4.63 \times 10^{113} \frac{J}{m^3}$. Kennelijk is dit reusachtige getal wel degelijk van belang binnen de natuurkunde. Een implicatie van de uitkomst van deze dimensionele analyse is ook dat we met elke aannemelijke fysische theorie uit zullen komen op een getal in de orde van grootte van 10^{113} .

Praktisch is een energiedichtheid in de orde van grootte van $10^{113} \text{ Joule } m^{-3}$ volstrekt onmogelijk. Zelfs bij een massadichtheid van één neutron per kubieke ℓ_p wordt deze energiedichtheid niet gehaald. In een heelal met een dergelijke vacuümenergie zouden processen zoals stervorming uitgesloten zijn. Alleen al het feit dat wij mensen bestaan geeft aan dat een dergelijke waarde voor de vacuümenergie niet consistent is met de feiten en daarmee onze huidige natuurkundige modellen. Om ons bestaan mogelijk te maken mag de vacuümenergie zelfs niet meer dan een factor 3 van de gevonden $10^{-8} J m^{-3}$ afwijken!

4 Conclusie

Op grond van de recent gemeten versnelling van de expansie van het heelal kan de bijdrage van de vacuümenergie aan de samenstelling van ons heelal worden geschat. Met de huidige natuurkundige theorieën is het echter nog niet gelukt om een energiedichtheid voor het vacuüm te vinden die in overeenstemming is met de waargenomen waarde. De typische waarden die wij vinden op basis van de huidige theorieën wijken af van de metingen met een factor 10^{120} . Een dergelijke vacuümenergie zou een heelal opleveren waarin de meest elementaire processen die ons bestaan mogelijk maken onmogelijk zouden zijn. Dit duidt er opdat het begrip vacuümenergie tot op vandaag de dag nog niet helemaal begrepen is.

Deze conclusie geeft een goede aanleiding om te vermoeden dat de natuurkundige theorieën waar wij nu over beschikken niet volledig zijn. Mogelijk moet er een totaal andere betekenis aan de energiedichtheid van $10^{113} \text{ J m}^{-3}$ gehecht worden.

Een van de mogelijkheden hiervoor is de energiedichtheid van een foton met een golflengte van ℓ_p . Of we hier dan nog een diepere betekenis aan moeten koppelen en wat deze dan is blijft de vraag.

Het is ook mogelijk om je af te vragen of de vacuümenergie wel af te leiden is. In de stringtheorie is het bijvoorbeeld mogelijk om een model op te stellen waarin continu verschillende universa ontstaan. Telkens wanneer twee 'branes' botsen zou hun kinetische energie deels als een Big Bang kunnen worden omgezet in massa en straling. Elke botsing geeft zijn eigen universum met zijn eigen vacuümenergie. Wij leven dan toevallig in een universum met een vacuümenergie die het universum zoals wij dat kennen mogelijk maakt. In dat geval is de aanleiding van de energiedichtheid van het vacuüm in ons universum niets meer dan een toevallige samenloop van omstandigheden waarin ons universum tot stand kwam. Of is de energiedichtheid van het vacuüm dan misschien waar een van de grenzen van de natuurkunde ligt?

Dit blijft allemaal speculatie, zonder enige vaste natuurkundige basis. Maar wanneer de natuurkundige theorieën tekort schieten, is speculatie misschien wel ons beste uitgangspunt.