Chapter 1

Basisdefinities

(1) DEFINITIE. Definieer "$...a_n...a_3a_2a_1a_0$" als de functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ met:

$$[...a_n...a_3a_2a_1a_0](m) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, 10^i$$

(De a_k worden gekozen uit $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.)

De aldus gedefinieerde functies noemen we *primitieve linkse getallen*, en de *verzameling der primitieve linkse getallen* geven we weer als $\mathbb{P}l$. De uitdrukking "primitieve linkse getallen" zullen we verder veelal afkorten tot "pl-getallen". Dat is niet zo'n mond vol. Een aanduiding van de vorm "$...a_n...a_3a_2a_1a_0$" voor een pl-getal met de boven gegeven interpretatie als een functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ noemen we de *decimale gedaante* van dat pl-getal.

(2) DEFINITIE. Onder het *pseudoquotiënt* pq(x,y) van twee pl-getallen x en y verstaan we de verzameling van alle verdichtingspunten in $\overline{\mathbb{R}}$ van de onderstaande oneindige rij quotiënten:

$$\frac{x(0)+1}{y(0)+1}, \frac{x(1)+1}{y(1)+1}, \frac{x(2)+1}{y(2)+1}, \frac{x(3)+1}{y(3)+1}, \ldots$$

Hierin is $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ de uitgebreide reële getallenlijn.

(3) DEFINITIE. Onder het *panorama* pan(x) van een pl-getal x verstaan we de functie van $\mathbb{P}l$ naar $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ met:

$$[\text{pan}(x)](z) = \text{pq}(x, z)$$

(4) DEFINITIE. Onder *gegeneraliseerde linkse getallen* verstaan we functies van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$, en de *verzameling der gegeneraliseerde linkse getallen* geven we aan als $\mathbb{G}l$. Vaak zullen we in plaats van "gegeneraliseerde linkse

getallen" kortweg spreken van "gl-getallen". De optelling + en vermenigvuldiging . voor de gl-getallen (en daarmee ook voor de pl-getallen) definiëren we als volgt:

$$[x+y](n) = x(n) + y(n) \ \ \& \ \ [x.y](n) = x(n).y(n)$$

Daarmee vormt $(\mathbb{G}l, +, .)$ een commutatieve (functie)ring.

De verzameling der primitieve linkse getallen $\mathbb{P}l$ vormt dus een deelverzameling van de verzameling der gegeneraliseerde linkse getallen $\mathbb{G}l$. Alle pl-getallen zijn dus ook steeds gl-getallen, maar gl-getallen zijn niet steeds ook pl-getallen. Veel gl-getallen hebben geen decimale gedaante in de eerder gedefinieerde betekenis, maar de pl-getallen hebben dat per definitie wel altijd. Ten slotte zijn alle sommen x+y en producten x.y van twee pl-getallen x en y steeds gl-getallen, maar (lang) niet altijd weer pl-getallen.

(5) DEFINITIE. Definieer "$t...a_n...a_3a_2a_1a_0$" als de functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ met:

$$[t...a_n...a_3a_2a_1a_0](m) = t\sum_{i=0}^{m} a_i\,10^i$$

(Het teken t is + of - , en de a_k worden gekozen uit $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.)

De aldus gedefinieerde functies noemen we *hele linkse getallen*, en de *verzameling der hele linkse getallen* geven we weer als $\mathbb{H}l$. De uitdrukking "hele linkse getallen" zullen we verder vaak afkorten tot "hl-getallen". En een aanduiding van de vorm "$t...a_n...a_3a_2a_1a_0$" voor een hl-getal met de boven gegeven interpretatie als een functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ noemen we ook hier de *decimale gedaante* van dat hl-getal.

(6) DEFINITIE. Onder de *ring der volledige linkse getallen* $(\mathbb{V}l, +, .)$ verstaan we de deelring van $(\mathbb{G}l, +, .)$ gegenereerd door $\mathbb{H}l$. De verzameling $\mathbb{V}l$ noemen we dan uiteraard de *verzameling der volledige linkse getallen* terwijl we $\mathbb{V}l$'s elementen *volledige linkse getallen* of kortweg vl-getallen noemen. De som en het product van twee vl-getallen zijn ook altijd zelf weer vl-getallen. Bovendien kunnen alle vl-getallen als de som van een eindig aantal producten van eindige aantallen hl-getallen geschreven worden.