Hoofdstuk 1

Basisdefinities

(1) DEFINITIE. Definieer "$...a_n...a_3a_2a_1a_0$" als de functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ met:

$$[...a_n...a_3a_2a_1a_0](m) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, 10^i$$

(De a_k worden gekozen uit $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.)

De aldus gedefinieerde functies noemen we *primitieve linkse getallen*, en de *verzameling der primitieve linkse getallen* geven we weer als $\mathbb{P}l$. De uitdrukking "primitieve linkse getallen"zullen we verder veelal afkorten tot "pl-getallen". Dat is niet zo'n mond vol. Een aanduiding van de vorm "$...a_n...a_3a_2a_1a_0$"voor een pl-getal met de boven gegeven interpretatie als een functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ noemen we de *decimale gedaante* van dat pl-getal.

(2) DEFINITIE. Onder het *pseudoquotiënt* pq(x,y) van twee pl-getallen x en y verstaan we de verzameling van alle verdichtingspunten in $\overline{\mathbb{R}}$ van de onderstaande oneindige rij quotiënten:

$$\frac{x(0)+1}{y(0)+1}, \frac{x(1)+1}{y(1)+1}, \frac{x(2)+1}{y(2)+1}, \frac{x(3)+1}{y(3)+1}, \ldots$$

Hierin is $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ de uitgebreide reële getallenlijn.

(3) DEFINITIE. Onder het *panorama* pan(x) van een pl-getal x verstaan we de functie van $\mathbb{P}l$ naar $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ met:

$$[\mathrm{pan}(x)](z) = \mathrm{pq}(x, z)$$

(4) DEFINITIE. Onder *gegeneraliseerde linkse getallen* verstaan we functies van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$, en de *verzameling der gegeneraliseerde linkse getallen* geven we aan als $\mathbb{G}l$. Vaak zullen we in plaats van "gegeneraliseerde linkse

getallen"kortweg spreken van "gl-getallen". De optelling + en vermenigvuldiging . voor de gl-getallen (en daarmee ook voor de pl-getallen) definiëren we als volgt:

$$[x + y](n) = x(n) + y(n) \ \ \& \ \ [x.y](n) = x(n).y(n)$$

Daarmee vormt $(\mathbb{G}l, +, .)$ een commutatieve (functie)ring.

De verzameling der primitieve linkse getallen $\mathbb{P}l$ vormt dus een deelverzameling van de verzameling der gegeneraliseerde linkse getallen $\mathbb{G}l$. Alle pl-getallen zijn dus ook steeds gl-getallen, maar gl-getallen zijn niet steeds ook pl-getallen. Veel gl-getallen hebben geen decimale gedaante in de eerder gedefinieerde betekenis, maar de pl-getallen hebben dat per definitie wel altijd. Ten slotte zijn alle sommen x+y en producten x.y van twee pl-getallen x en y steeds gl-getallen, maar (lang) niet altijd weer pl-getallen.

(5) DEFINITIE. Definieer "$t ... a_n ... a_3 a_2 a_1 a_0$" als de functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ met:

$$[t ... a_n ... a_3 a_2 a_1 a_0](m) = t \sum_{i=0}^{m} a_i \, 10^i$$

(Het teken t is + of - , en de a_k worden gekozen uit $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.)

De aldus gedefinieerde functies noemen we *hele linkse getallen*, en de *verzameling der hele linkse getallen* geven we weer als $\mathbb{H}l$. De uitdrukking "hele linkse getallen"zullen we verder vaak afkorten tot "hl-getallen". En een aanduiding van de vorm "$t ... a_n ... a_3 a_2 a_1 a_0$"voor een hl-getal met de boven gegeven interpretatie als een functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ noemen we ook hier de *decimale gedaante* van dat hl-getal.

(6) DEFINITIE. Onder de *ring der volledige linkse getallen* $(\mathbb{V}l, +, .)$ verstaan we de deelring van $(\mathbb{G}l, +, .)$ gegenereerd door $\mathbb{H}l$. De verzameling $\mathbb{V}l$ noemen we dan uiteraard de *verzameling der volledige linkse getallen* terwijl we $\mathbb{V}l$'s elementen *volledige linkse getallen* of kortweg vl-getallen noemen. De som en het product van twee vl-getallen zijn ook altijd zelf weer vl-getallen. Bovendien kunnen alle vl-getallen als de som van een eindig aantal producten van eindige aantallen hl-getallen geschreven worden.

Hoofdstuk 2

Eenpuntslemma

(7) LEMMA. Laat $x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ en $y_0, y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$ oneindige rijen cijfers gekozen uit $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ zijn. Definieer verder:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{n} x_k 10^k$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} y_k 10^k$$

Stel bovendien dat de onderstaande rij slechts één verdichtingspunt in $\overline{\mathbb{R}}$ heeft en wel op “1”.

$$\frac{x(0)+1}{y(0)+1}, \frac{x(1)+1}{y(1)+1}, \frac{x(2)+1}{y(2)+1}, \frac{x(3)+1}{y(3)+1}, ...$$

Dan kan $x_k \neq y_k$ hoogstens voor eindig veel k voorkomen.

BEWIJS. Het bewijs bestaat uit de delen (A) t/m (E):

(A) Stel dat voor een zekere n geldt dat: $y_n - 1 > x_n$. Dan vinden we voor $\epsilon = 1/11$ dat:

$$(y_n - 1) - \epsilon\,(y_n + 10^{-n}) > x_n$$

$$y_n + 10^{-n} - \epsilon\,(y_n + 10^{-n}) > x_n + 1 + 10^{-n}$$

$$(1 - \epsilon)(y_n + 10^{-n}) > (x_n + 1) + 10^{-n}$$

$$1-\epsilon > \frac{(x_n+1)+10^{-n}}{y_n+10^{-n}}$$

$$1-\epsilon > \frac{(x_n+1)10^{n}+1}{y_n 10^{n}+1}$$

$$1-\epsilon > \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$$

$$1 > \frac{x(n)+1}{y(n)+1}+\epsilon$$

$$1-\frac{x(n)+1}{y(n)+1} > \epsilon$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right| > \epsilon$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right| > \frac{1}{11}$$

Dus wanneer voor oneindig veel n geldt dat $y_n - 1 > x_n$ dan kan de limiet $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$ onmogelijk meer 1 zijn.

(B) Stel dat voor een zekere n geldt dat: $y_n + 1 < x_n$. Dan vinden we voor $\epsilon = 1/12$ dat:

$$(y_n+1)+\epsilon\left((y_n+1)+10^{-n}\right) < x_n$$

$$(y_n+1)+10^{-n}+\epsilon\left((y_n+1)+10^{-n}\right) < x_n+10^{-n}$$

$$(1+\epsilon)((y_n+1)+10^{-n}) < x_n+10^{-n}$$

$$1+\epsilon < \frac{x_n+10^{-n}}{(y_n+1)+10^{-n}}$$

$$1+\epsilon < \frac{x_n 10^{n}+1}{(y_n+1)10^{n}+1}$$

$$1+\epsilon < \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$$

$$\epsilon < \frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1$$

$$\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1 > \epsilon$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right|>\epsilon$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right|>\frac{1}{12}$$

Dus wanneer voor oneindig veel n geldt dat $y_n + 1 < x_n$ dan kan de limiet $\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$ onmogelijk nog 1 zijn.

We hebben in (A) en (B) dus gevonden dat:

- Wanneer voor oneindig veel n geldt dat $y_n - 1 > x_n$ dan kan de limiet $\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$ onmogelijk meer 1 zijn.
- Wanneer voor oneindig veel n geldt dat $y_n + 1 < x_n$ dan kan de limiet $\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$ onmogelijk nog 1 zijn.

(C) Met andere woorden: wanneer $\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$, dan kan er slechts voor eindig veel n gelden dat $y_n - 1 > x_n$ en kan er ook slechts voor eindig veel n gelden dat $y_n + 1 < x_n$. Maar als er slechts voor eindig veel n geldt dat $y_n - 1 > x_n$ en dat $y_n + 1 < x_n$, dan is er een natuurlijk getal M zodanig dat $y_n - 1 > x_n$ en $y_n + 1 < x_n$ voor $n > M$ niet langer voorkomen. Bijgevolg impliceert $\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$ dat er een natuurlijk getal M is zodat $y_n - 1 \leq x_n \leq y_n + 1$ voor alle $n > M$.

Indien $\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$ dan is er dus steeds een natuurlijk getal M zodanig dat er voor alle $n > M+2$ bijpassende waarden van $\alpha_n, \beta_{n-1} \in \{-1, 0, +1\}$ & $\gamma_{n-2} \in (-2, +2)$ te vinden zijn zodat:

$$\frac{x(n)+1}{y(n)+1} = \frac{(y_n+\alpha_n)10^n + (y_{n-1}+\beta_{n-1})10^{n-1} + x(n-2) \, + 1}{y_n 10^n + y_{n-1}10^{n-1} + y(n-2) \, + 1}$$

$$\frac{x(n)+1}{y(n)+1} = \frac{y_n 10^n + y_{n-1}10^{n-1} + y(n-2) \, + 1}{y_n 10^n + y_{n-1}10^{n-1} + y(n-2) \, + 1} + \frac{\alpha_n 10^n + \beta_{n-1}10^{n-1} + x(n-2) - y(n-2)}{y_n 10^n + y_{n-1}10^{n-1} + y(n-2) \, + 1}$$

$$\frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1 + \frac{\alpha_n 10^n + \beta_{n-1}10^{n-1} + \gamma_{n-2}10^{n-2}}{y(n)+1}$$

$$\frac{x(n)+1}{y(n)+1} - 1 = \frac{\alpha_n + \frac{\beta_{n-1}}{10} + \frac{\gamma_{n-2}}{100}}{(y(n)+1)10^{-n}}$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right| = \left|\frac{\alpha_n + \frac{\beta_{n-1}}{10} + \frac{\gamma_{n-2}}{100}}{(y(n)+1)10^{-n}}\right|$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right| \geq \left|\frac{\alpha_n + \frac{\beta_{n-1}}{10} + \frac{\gamma_{n-2}}{100}}{10^{n+1}\cdot 10^{-n}}\right|$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right| \geq \left|\frac{\alpha_n + \frac{\beta_{n-1}}{10} + \frac{\gamma_{n-2}}{100}}{10}\right|$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right| \geq \frac{1}{1000}|100\alpha_n + 10\beta_{n-1} + \gamma_{n-2}|$$

(D) Rest nog aan te tonen dat er voor $|100\alpha_n + 10\beta_{n-1} + \gamma_{n-2}|$ een positieve ondergrens bestaat die opgaat voor *alle* combinaties van α_n en β_{n-1} met $\alpha_n, \beta_{n-1} \in \{-1, 0, +1\}$ waarbij deze niet beide nul zijn. We zien dat:

α_n	β_{n-1}	$100\alpha_n + 10\beta_{n-1}$	$\|100\alpha_n + 10\beta_{n-1} + \gamma_{n-2}\|$
0	0	0	$\in [0, 2)$
0	-1	-10	> 8
0	+1	+10	> 8
-1	0	-100	> 98
-1	-1	-110	> 108
-1	+1	-90	> 88
+1	0	100	> 98
+1	-1	90	> 88
+1	+1	110	> 108

Dus wanneer α_n en β_{n-1} niet beide nul zijn dan geldt: $|100\alpha_n+10\beta_{n-1}+\gamma_{n-2}| > 8$.

Bijgevolg zal $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$ niet gelijk aan 1 kunnen zijn als in de combinatie α_n & β_{n-1} voor oneindig veel n de α_n en β_{n-1} niet beide nul zijn. En omgekeerd volgt dus uit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$ dat in de combinatie α_n & β_{n-1} de α_n en β_{n-1} slechts voor eindig veel n niet beide nul kunnen zijn.

Voor alle x en y waarvoor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$ is er derhalve een bijpassend natuurlijk getal K zodat $\alpha_n = 0$ (en $\beta_{n-1} = 0$) voor alle $n > K$. En dus is er ook voor alle x en y waarvoor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$ een bijpassend natuurlijk getal K zodanig dat $x_n = y_n$ voor alle $n > K$.

(E) Het is bekend dat als er voor een reële rij slechts één verdichtingspunt in $\overline{\mathbb{R}}$ bestaat dat dan dit verdichtingspunt ook de limiet van die rij is. $\square$

(8) COROLLARIUM. Laat $x = ...x_n...x_3x_2x_1x_0$ en $y = ...y_n...y_3y_2y_1y_0$ twee pl-getallen zijn waarvoor: $\mathrm{pq}(x, y) = \{1\}$. Dan is er een bijpassend natuurlijk getal K zodanig dat $x_n = y_n$ voor alle $n > K$.

BEWIJS. Dit volgt direct uit (2) en (7). $\square$