Hoofdstuk 1

Basisdefinities

(1) DEFINITIE. Definieer "$...a_n...a_3a_2a_1a_0$" als de functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ met:

$$[...a_n...a_3a_2a_1a_0](m) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, 10^i$$

De a_k worden daarbij gekozen uit $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Omdat we de verzameling $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ in het vervolg om de haverklap zullen tegenkomen voeren we daar het eigen teken $\mathbb{T}$ voor in. De a_k zijn dus elementen van $\mathbb{T}$. De aldus gedefinieerde functies van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ noemen we *primitieve linkse getallen*, en de *verzameling der primitieve linkse getallen* geven we weer als $\mathbb{P}l$. De uitdrukking "primitieve linkse getallen"zullen we overigens verder veelal afkorten tot "pl-getallen". Dat is niet zo'n mond vol. Verder noemen we een aanduiding van de vorm "$...a_n...a_3a_2a_1a_0$"voor een pl-getal met de boven gegeven interpretatie als een functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ de *decimale gedaante* van dat pl-getal. Onder de *cijferrij* cr(x) van een primitief links getal $x = ...a_n...a_3a_2a_1a_0$ tenslotte verstaan we de oneindige rij $(a_i)_{i=0}^{\infty} = a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,,\, a_3\,,\, ...\,,\, a_n\,,\, ...$

(2) DEFINITIE. Onder het *pseudoquotiënt* pq(x,y) van twee pl-getallen x en y verstaan we de verzameling van alle verdichtingspunten in $\overline{\mathbb{R}}$ van de onderstaande oneindige rij quotiënten:

$$\frac{x(0)+1}{y(0)+1}, \frac{x(1)+1}{y(1)+1}, \frac{x(2)+1}{y(2)+1}, \frac{x(3)+1}{y(3)+1}, ...$$

Hierin is $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ de uitgebreide reële getallenlijn.

(3) DEFINITIE. Onder het *panorama* pan(x) van een pl-getal x verstaan we de functie van $\mathbb{P}l$ naar $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ met:

$$[\mathrm{pan}(x)](z) = \mathrm{pq}(x, z)$$

(4) DEFINITIE. Onder *gegeneraliseerde linkse getallen* verstaan we functies van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$, en de *verzameling der gegeneraliseerde linkse getallen* geven we aan als $\mathbb{G}l$. Vaak zullen we in plaats van "gegeneraliseerde linkse getallen"kortweg spreken van "gl-getallen". De optelling + en vermenigvuldiging . voor de gl-getallen (en daarmee ook voor de pl-getallen) definiëren we als volgt:

$$[x+y](n) = x(n) + y(n) \;\;\&\;\; [x.y](n) = x(n).y(n)$$

Daarmee vormt $(\mathbb{G}l, +, .)$ een commutatieve (functie)ring.

De verzameling der primitieve linkse getallen $\mathbb{P}l$ vormt dus een deelverzameling van de verzameling der gegeneraliseerde linkse getallen $\mathbb{G}l$. Alle pl-getallen zijn dus ook steeds gl-getallen, maar gl-getallen zijn niet steeds ook pl-getallen. Veel gl-getallen hebben geen decimale gedaante in de eerder gedefinieerde betekenis, maar de pl-getallen hebben dat per definitie wel altijd. Ten slotte zijn alle sommen x+y en producten x.y van twee pl-getallen x en y steeds gl-getallen, maar (lang) niet altijd weer pl-getallen.

(5) DEFINITIE. Definieer "$t...a_n...a_3a_2a_1a_0$" als de functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ met:

$$[t...a_n...a_3a_2a_1a_0](m) = t\sum_{i=0}^{m} a_i\, 10^i$$

(Het teken t is + of - , en de a_k worden gekozen uit $\mathbb{T}$.)

De aldus gedefinieerde functies noemen we *hele linkse getallen*, en de *verzameling der hele linkse getallen* geven we weer als $\mathbb{H}l$. De uitdrukking "hele linkse getallen"zullen we verder vaak afkorten tot "hl-getallen". En een aanduiding van de vorm "$t...a_n...a_3a_2a_1a_0$"voor een hl-getal met de boven gegeven interpretatie als een functie van $\mathbb{N}$ (inclusief 0) naar $\mathbb{R}$ noemen we ook hier de *decimale gedaante* van dat hl-getal.

(6) DEFINITIE. Onder de *ring der volledige linkse getallen* $(\mathbb{V}l, +, .)$ verstaan we de deelring van $(\mathbb{G}l, +, .)$ gegenereerd door $\mathbb{H}l$. De verzameling $\mathbb{V}l$ noemen we dan uiteraard de *verzameling der volledige linkse getallen* terwijl we $\mathbb{V}l$'s elementen *volledige linkse getallen* of kortweg vl-getallen noemen. De som en het product van twee vl-getallen zijn ook altijd zelf weer vl-getallen. Bovendien kunnen alle vl-getallen als de som van een eindig aantal producten van eindige aantallen hl-getallen geschreven worden.

Hoofdstuk 2

Eenpuntslemma

(7) LEMMA. Laat $x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ en $y_0, y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$ oneindige rijen cijfers gekozen uit $\mathbb{T}$ zijn. Definieer verder:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{n} x_k 10^k$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} y_k 10^k$$

Stel bovendien dat de onderstaande rij slechts één verdichtingspunt in $\overline{\mathbb{R}}$ heeft en wel op "1".

$$\frac{x(0)+1}{y(0)+1}, \frac{x(1)+1}{y(1)+1}, \frac{x(2)+1}{y(2)+1}, \frac{x(3)+1}{y(3)+1}, ...$$

Dan kan $x_k \neq y_k$ hoogstens voor eindig veel k voorkomen.

BEWIJS. Het bewijs bestaat uit de delen (A) t/m (E):

(A) Stel dat voor een zekere n geldt dat: $y_n - 1 > x_n$. Dan vinden we voor $\epsilon = 1/11$ dat:

$$(y_n - 1) - \epsilon\,(y_n + 10^{-n}) > x_n$$

$$y_n + 10^{-n} - \epsilon\,(y_n + 10^{-n}) > x_n + 1 + 10^{-n}$$

$$(1-\epsilon)(y_n + 10^{-n}) > (x_n + 1) + 10^{-n}$$

$$1-\epsilon > \frac{(x_n+1)+10^{-n}}{y_n+10^{-n}}$$

$$1-\epsilon > \frac{(x_n+1)10^{n}+1}{y_n 10^{n}+1}$$

$$1-\epsilon > \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$$

$$1 > \frac{x(n)+1}{y(n)+1}+\epsilon$$

$$1-\frac{x(n)+1}{y(n)+1} > \epsilon$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right| > \epsilon$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right| > \frac{1}{11}$$

Dus wanneer voor oneindig veel n geldt dat $y_n - 1 > x_n$ dan kan de limiet $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$ onmogelijk meer 1 zijn.

(B) Stel dat voor een zekere n geldt dat: $y_n + 1 < x_n$. Dan vinden we voor $\epsilon = 1/12$ dat:

$$(y_n+1)+\epsilon\left((y_n+1)+10^{-n}\right) < x_n$$

$$(y_n+1)+10^{-n}+\epsilon\left((y_n+1)+10^{-n}\right) < x_n+10^{-n}$$

$$(1+\epsilon)((y_n+1)+10^{-n}) < x_n+10^{-n}$$

$$1+\epsilon < \frac{x_n+10^{-n}}{(y_n+1)+10^{-n}}$$

$$1+\epsilon < \frac{x_n 10^{n}+1}{(y_n+1)10^{n}+1}$$

$$1+\epsilon < \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$$

$$\epsilon < \frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1$$

$$\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1 > \epsilon$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right|>\epsilon$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1}-1\right|>\frac{1}{12}$$

Dus wanneer voor oneindig veel n geldt dat $y_n + 1 < x_n$ dan kan de limiet $\lim_{n\to\infty}\frac{x(n)+1}{y(n)+1}$ onmogelijk nog 1 zijn.

We hebben in (A) en (B) dus gevonden dat:

- Wanneer voor oneindig veel n geldt dat $y_n - 1 > x_n$ dan kan de limiet $\lim_{n\to\infty}\frac{x(n)+1}{y(n)+1}$ onmogelijk meer 1 zijn.
- Wanneer voor oneindig veel n geldt dat $y_n + 1 < x_n$ dan kan de limiet $\lim_{n\to\infty}\frac{x(n)+1}{y(n)+1}$ onmogelijk nog 1 zijn.

(C) Met andere woorden: wanneer $\lim_{n\to\infty}\frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$, dan kan er slechts voor eindig veel n gelden dat $y_n - 1 > x_n$ en kan er ook slechts voor eindig veel n gelden dat $y_n + 1 < x_n$. Maar als er slechts voor eindig veel n geldt dat $y_n - 1 > x_n$ en dat $y_n + 1 < x_n$, dan is er een natuurlijk getal M zodanig dat $y_n - 1 > x_n$ en $y_n + 1 < x_n$ voor $n > M$ niet langer voorkomen. Bijgevolg impliceert $\lim_{n\to\infty}\frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$ dat er een natuurlijk getal M is zodat $y_n - 1 \leq x_n \leq y_n + 1$ voor alle $n > M$.

Indien $\lim_{n\to\infty}\frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$ dan is er dus steeds een natuurlijk getal M zodanig dat er voor alle $n > M+2$ bijpassende waarden van $\alpha_n, \beta_{n-1} \in \{-1, 0, +1\}$ & $\gamma_{n-2} \in (-2, +2)$ te vinden zijn zodat:

$$\frac{x(n)+1}{y(n)+1} = \frac{(y_n+\alpha_n)10^n + (y_{n-1}+\beta_{n-1})10^{n-1} + x(n-2)\ +1}{y_n 10^n + y_{n-1}10^{n-1} + y(n-2)\ +1}$$

$$\frac{x(n)+1}{y(n)+1} = \frac{y_n 10^n + y_{n-1}10^{n-1} + y(n-2)\ +1}{y_n 10^n + y_{n-1}10^{n-1} + y(n-2)\ +1} + \frac{\alpha_n 10^n + \beta_{n-1}10^{n-1} + x(n-2) - y(n-2)}{y_n 10^n + y_{n-1}10^{n-1} + y(n-2)\ +1}$$

$$\frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1 + \frac{\alpha_n 10^n + \beta_{n-1}10^{n-1} + \gamma_{n-2}10^{n-2}}{y(n)+1}$$

$$\frac{x(n)+1}{y(n)+1} - 1 = \frac{\alpha_n + \frac{\beta_{n-1}}{10} + \frac{\gamma_{n-2}}{100}}{(y(n)+1)10^{-n}}$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1} - 1\right| = \left|\frac{\alpha_n + \frac{\beta_{n-1}}{10} + \frac{\gamma_{n-2}}{100}}{(y(n)+1)10^{-n}}\right|$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1} - 1\right| \geq \left|\frac{\alpha_n + \frac{\beta_{n-1}}{10} + \frac{\gamma_{n-2}}{100}}{10^{n+1}\cdot 10^{-n}}\right|$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1} - 1\right| \geq \left|\frac{\alpha_n + \frac{\beta_{n-1}}{10} + \frac{\gamma_{n-2}}{100}}{10}\right|$$

$$\left|\frac{x(n)+1}{y(n)+1} - 1\right| \geq \frac{1}{1000}|100\alpha_n + 10\beta_{n-1} + \gamma_{n-2}|$$

(D) Rest nog aan te tonen dat er voor $|100\alpha_n + 10\beta_{n-1} + \gamma_{n-2}|$ een positieve ondergrens bestaat die opgaat voor *alle* combinaties van α_n en β_{n-1} met $\alpha_n, \beta_{n-1} \in \{-1, 0, +1\}$ waarbij deze niet beide nul zijn. We zien dat:

α_n	β_{n-1}	$100\alpha_n + 10\beta_{n-1}$	$\|100\alpha_n + 10\beta_{n-1} + \gamma_{n-2}\|$
0	0	0	$\in [0, 2)$
0	-1	-10	> 8
0	+1	+10	> 8
-1	0	-100	> 98
-1	-1	-110	> 108
-1	+1	-90	> 88
+1	0	100	> 98
+1	-1	90	> 88
+1	+1	110	> 108

Dus wanneer α_n en β_{n-1} niet beide nul zijn dan geldt: $|100\alpha_n + 10\beta_{n-1} + \gamma_{n-2}| > 8$.

Bijgevolg zal $\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1}$ niet gelijk aan 1 kunnen zijn als in de combinatie α_n & β_{n-1} voor oneindig veel n de α_n en β_{n-1} niet beide nul zijn. En omgekeerd volgt dus uit $\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$ dat in de combinatie α_n & β_{n-1} de α_n en β_{n-1} slechts voor eindig veel n niet beide nul kunnen zijn.

Voor alle x en y waarvoor $\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$ is er derhalve een bijpassend natuurlijk getal K zodat $\alpha_n = 0$ (en $\beta_{n-1} = 0$) voor alle $n > K$. En dus is er ook voor alle x en y waarvoor $\lim_{n\to\infty} \frac{x(n)+1}{y(n)+1} = 1$ een bijpassend natuurlijk getal K zodanig dat $x_n = y_n$ voor alle $n > K$.

(E) Het is bekend dat als er voor een reële rij slechts één verdichtingspunt in $\overline{\mathbb{R}}$ bestaat dat dan dit verdichtingspunt ook de limiet van die rij is. $\square$

(8) COROLLARIUM. Laat $x = ...x_n...x_3x_2x_1x_0$ en $y = ...y_n...y_3y_2y_1y_0$ twee pl-getallen zijn waarvoor: $\mathrm{pq}(x, y) = \{1\}$. Dan is er een bijpassend natuurlijk getal K zodanig dat $x_n = y_n$ voor alle $n > K$.

BEWIJS. Dit volgt direct uit (2) en (7). $\square$

Hoofdstuk 3

Primitieve linkse getallen

(9) DEFINITIE. We noemen een pl-getal $...a_n...a_2a_1a_0$ precies dan *eindig* als er een natuurlijk getal N bestaat zodat $a_k = 0$ voor $k > N$. Een pl-getal dat niet eindig is noemen we *oneindig*.

(10) DEFINITIE. De definitie van de nomenclatuur voor periodieke pl-getallen bestaat uit vier delen:

i. We noemen een pl-getal $...a_n...a_2a_1a_0$ precies dan *repeterend* als er een natuurlijk getal N en een positief natuurlijk getal p bestaan zodat voor alle natuurlijke getallen k en i geldt dat $a_{N+k.p+i} = a_{N+i}$.

ii. Onder de *periodestart* pest(x) van een repeterend pl-getal $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ verstaan we de kleinste waarde van het natuurlijke getal N zodat er een positief natuurlijk getal p bestaat waarbij voor alle natuurlijke getallen k en i geldt dat $a_{N+k.p+i} = a_{N+i}$.

iii. Onder de *periodelengte* perl(x) van een repeterend pl-getal $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ verstaan we de kleinste waarde van het positieve natuurlijke getal p zodat voor alle natuurlijke getallen k en i geldt dat $a_{\mathrm{pest}(x)+k.p+i} = a_{\mathrm{pest}(x)+i}$.

iv. Onder de *periode* van een repeterend pl-getal $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ verstaan we het eindige rijtje cijfers $a_{\mathrm{pest}(x)}$, $a_{\mathrm{pest}(x)+1}$, $a_{\mathrm{pest}(x)+2}$, $\cdots$, $a_{\mathrm{pest}(x)+\mathrm{perl}(x)-1}$.

(11) DEFINITIE. Laat $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ een pl-getal zijn. Voor het gemak noteren we de verzameling van alle eindige rijtjes $w = w_0$, w_1 , w_2 , ... , w_k van één of meer getallen (cijfers) gekozen uit $\mathbb{T}$ als $\mathbb{W}$. Verder schrijven we S(x,w,n) voor het aantal malen dat het rijtje w uit $\mathbb{W}$ bestaande uit $|w|$ cijfers als deelrij in de (uit x afgeleide) rij van n cijfers a_0 , a_1 , a_2 , ... , a_{n-1} voorkomt. Het aantal $|w|$ noemen we ook wel de *lengte* van het rijtje w. Tenslotte noemen we x precies dan *normaal* indien voor alle rijtjes w uit $\mathbb{W}$ van $|w|$ cijfers geldt dat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{S}(x,w,n)}{n} = \frac{1}{10^{|w|}}$$

(12) DEFINITIE. Laat $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ een pl-getal zijn. Dan noemen we x precies dan *rijk* indien alle rijtjes uit $\mathbb{W}$ ergens als deelrijtje in de cijferrij $\mathrm{cr}(x) = a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\,,\, a_n\,,\, \ldots$ voorkomen.

(13) STELLING. Alle normale pl-getallen zijn ook steeds rijke pl-getallen.

BEWIJS. Laat $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ een normaal pl-getal zijn. We schrijven weer S(x,w,n) voor het aantal malen dat het rijtje $w = w_0\,,\, w_1\,,\, w_2\,,\, ...\,,\, w_k$ uit $\mathbb{W}$ bestaande uit $|w|$ cijfers als deelrij in de (uit x afgeleide) rij van n cijfers $a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,,\, ...\,,\, a_{n-1}$ voorkomt. Dan geldt op grond van definitie (11) voor alle rijtjes w uit $\mathbb{W}$ van $|w|$ cijfers dat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{S}(x,w,n)}{n} = \frac{1}{10^{|w|}}$$

Er is dan ook een bij x en w horend positief natuurlijk getal N zodat voor alle $n > N$ geldt dat:

$$\left|\frac{\mathrm{S}(x,w,n)}{n} - \frac{1}{10^{|w|}}\right| < \frac{1}{2\cdot 10^{|w|}}$$

$$-\frac{1}{2\cdot 10^{|w|}} < \frac{\mathrm{S}(x,w,n)}{n} - \frac{1}{10^{|w|}} < \frac{1}{2\cdot 10^{|w|}}$$

$$\frac{1}{2\cdot 10^{|w|}} < \frac{\mathrm{S}(x,w,n)}{n} < \frac{3}{2\cdot 10^{|w|}}$$

$$\frac{n}{2\cdot 10^{|w|}} < \mathrm{S}(x,w,n) < \frac{3\,n}{2\cdot 10^{|w|}}$$

In het bijzonder geldt dan voor $n = 2\cdot 10^{|w|}\cdot \mathrm{N}$ dat $n > N$. Waardoor we krijgen:

$$\frac{2\cdot 10^{|w|}\cdot \mathrm{N}}{2\cdot 10^{|w|}} < \mathrm{S}(x,w,2\cdot 10^{|w|}\cdot \mathrm{N}) < \frac{3\cdot 2\cdot 10^{|w|}\cdot \mathrm{N}}{2\cdot 10^{|w|}}$$

$$\mathrm{N} < \mathrm{S}(x,w,2\cdot 10^{|w|}\cdot \mathrm{N}) < 3\mathrm{N}$$

Hieruit zien we dat voor een normaal pl-getal x het aantal malen S(x,w,n) dat een rijtje w uit $\mathbb{W}$ bestaande uit $|w|$ cijfers als deelrij in de (uit x afgeleide) rij van n cijfers $a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,,\, ...\,,\, a_{n-1}$ voorkomt voor het geval dat $n = 2\cdot 10^{|w|}\cdot \mathrm{N}$

steeds een positief natuurlijk getal is. En dit gaat op voor alle rijtjes w uit $\mathbb{W}$. Dus voor normale pl-getallen x komen alle rijtjes w uit $\mathbb{W}$ ook minstens één maal als deelrij in de cijferrij $\mathrm{cr}(x) = a_0 , a_1 , a_2 , ... , a_n , ...$ voor. Op grond van definitie (12) volgt dan dat alle normale pl-getallen ook steeds rijke pl-getallen zijn. □

(14) STELLING. Niet alle rijke pl-getallen zijn normale pl-getallen.

BEWIJS. Het volstaat een voorbeeld te geven van een rijk pl-getal dat geen normaal pl-getal is.

Laat $(g_i)_{i=0}^{\infty}$ de volgende oneindige rij zijn:

$$\mathbf{0}, 0, \mathbf{1}, 0, \mathbf{2}, 0, \mathbf{3}, 0, \mathbf{4}, 0, \mathbf{5}, 0, \mathbf{6}, 0, \mathbf{7}, 0, \mathbf{8}, 0, \mathbf{9}, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{2},$$
$$0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{3}, 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{4}, 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{5}, 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{6}, 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{7}, 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{8}, 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{9}, 0, 0,$$
$$\mathbf{1}, \mathbf{0}, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{1}, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{2}, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{3}, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{4}, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{5}, 0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{6}, 0, 0, \mathbf{1}, ...$$

Deze rij bevat achtereenvolgens alle eindige decimale rijtjes die hier voor de duidelijkheid vet zijn gedrukt met daar tussengevoegd rijtjes nullen waarbij er steeds precies zoveel nullen zijn tussengevoegd als het direct links daarvan staande eindige decimale rijtje termen (oftewel cijfers) heeft. Het is duidelijk dat alle rijtjes w uit $\mathbb{W}$ ergens als deelrij van de oneindige rij $(g_i)_{i=0}^{\infty}$ voorkomen. Het pl-getal $g = ...g_n...g_2g_1g_0$ is dus een rijk pl-getal.

We bekijken nu het rijtje (dat we hier 'u' noemen) bestaande uit slechts één term namelijk 0. De relatieve frequentie $\frac{\mathrm{S(g,u,}n)}{n}$ van u wordt met ieder rijtje tussen geplaatste nullen op een waarde groter dan of gelijk aan 0,5 teruggezet. De relatieve frequentie van u kan voor n nadert naar oneindig dus niet naar $\frac{1}{10^{|u|}} = 0,1$ naderen, wat wel zou moeten als g een normaal pl-getal was. Dus is g geen normaal pl-getal. □

(15) LEMMA. Voor al de repeterende pl-getallen $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ geldt dat de cijferrij cr(x) nooit meer dan pest(x) + perl(x) verschillende deelrijtjes w van onderling gelijke lengte $|w|$ uit $\mathbb{W}$ kan bevatten.

BEWIJS. Laat $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ een repeterend pl-getal zijn en w een rijtje uit $\mathbb{W}$. Dan kunnen we x voor pest(x) = r en perl(x) = s ook schrijven als:

$$...a_{r+s-1}...a_{r+2}a_{r+1}a_r a_{r+s-1}...a_{r+2}a_{r+1}a_r a_{r+s-1}...a_{r+2}a_{r+1}a_r...a_2a_1a_0$$

De cijferrij cr(x) wordt dan:

$$a_0, a_1, a_2, ..., a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_{r+s-1}, a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_{r+s-1}, a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_{r+s-1}, ...$$

Er zijn oneindig veel indices i waarop je deelrijen w met een gekozen vaste lengte $|w|$ in cr(x) zou kunnen laten beginnen, maar alleen een start bij één van de indices i = 0, 1, 2, ... , r, ... , r+s-1 levert *eventueel* verschillende deelrijen op. Voor hogere indices krijg je wegens het repeterend zijn van x slechts meer van hetzelfde. Er komen in cr(x) dus in elk geval niet meer dan pest(x) + perl(x) *verschillende* deelrijen w met een vaste lengte $|w|$ voor. Het maakt voor dit bewijs ook niet uit hoe groot of klein we de lengte $|w|$ van de deelrijen w kiezen zolang die gekozen lengte maar een positief natuurlijk getal is. □

(16) COROLLARIUM. Geen enkel repeterend pl-getal is een rijk pl-getal.

BEWIJS. Het aantal verschillende rijtjes w uit $\mathbb{W}$ met lengte $|w|$ is $10^{|w|}$, dus neemt dat aantal exponentieel met de lengte $|w|$ toe. Voor een rijk pl-getal $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ kan er dus geen van $|w|$ onafhankelijke reële bovengrens zijn aan het aantal verschillende rijtjes w van gelijke lengte die als deelrijtje in de cijferrij cr(x) voorkomen. Maar op grond van lemma (15) weten we dat er voor een repeterend pl-getal $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ wel een van $|w|$ onafhankelijke reële bovengrens bestaat voor het aantal verschillende deelrijtjes van gelijke lengte die in de cijferrij cr(x) voorkomen. Dus zijn repeterende pl-getallen nooit rijke pl-getallen. □

(17) COROLLARIUM. Geen enkel repeterend pl-getal is een normaal pl-getal.

BEWIJS. Stel dat er een repeterend pl-getal x bestaat dat tevens normaal is. Dan zou dit repeterende pl-getal x wegens stelling 13 ook een rijk pl-getal zijn. Dus zou er dan een repeterend pl-getal x zijn dat tevens een rijk pl-getal is. Maar dat laatste is volgens corollarium 16 onwaar. Dus is geen enkel repeterend pl-getal een normaal pl-getal. □

(18) STELLING. Alle rijke pl-getallen zijn oneindige pl-getallen.

BEWIJS. Laat $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ een rijk pl-getal zijn. Dan bevat de cijferrij cr(x) als deelrijen onder meer de onderstaande rijtjes:

1
1, 1
1, 1, 1
⋮

Dus bestaat er geen natuurlijk getal N zodat in de cijferrij $\text{cr}(x) = a_0 , a_1 , a_2 , ... , a_n , ...$

voor indices $i > N$ geldt dat $a_i = 0$. Waaruit we zien dat $x = ...a_n...a_2a_1a_0$ geen eindig pl-getal is, en bijgevolg dus wel een oneindig pl-getal is. □

(19) COROLLARIUM. Alle normale pl-getallen zijn oneindige pl-getallen.

BEWIJS. Laat x een normaal pl-getal zijn, dan is x wegens stelling 13 ook een rijk pl-getal en bijgevolg vanwege stelling 18 bovendien een oneindig pl-getal. □