Formele en metaformele getallen
(eerste versie)

Bart van Donselaar

Preprint, 1e kerstdag 2011

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

We leggen hier de basis voor een getallensysteem dat vermenigvuldigen met nul een wat minder onherroepelijk karakter geeft. Veel voorbereidend werk is op het Wetenschapsforum.nl al gedaan. Nu zullen we de grondslagen van dit systeem rigoureus en stap voor stap formuleren. Dit is pas het begin, want het echte werk moet nog komen. Dat is het concrete *rekenen* met de “nullen” onder de formele en metaformele getallen. Aan een elegante manier daarvoor wordt nog gewerkt.

Hoofdstuk 2

Formele getallen

1. De *formele getallen* definiëren we als volgt:

i. Alle reële getallen zijn formele getallen.

ii. Als A en B formele getallen zijn dan is $(A)\clubsuit(B)$ dat ook.

iii. Als A en B formele getallen zijn dan is $(A)\diamondsuit(B)$ dat ook.

iv. Alleen die getallen zijn formele getallen die dat volgens een of meer van de bovenstaande drie regels zijn.

De formele getallen zijn dus formele uitdrukkingen bestaande uit reële getallen met eventueel nog haakjes en klaveren- en ruiten-tekens volgens de bovenstaande vier regels. Alleen identieke formele getallen A en B noemen we *gelijk* (genoteerd als A = B). De *verzameling der formele getallen* geven we weer als $\mathfrak{F}$.

2. Op grond van definitie 1. is het duidelijk dat ieder formeel getal bij vervanging van de $\clubsuit$-tekens door +-tekens en de $\diamondsuit$-tekens door .-tekens overgaat in een bijbehorende rekenkundige uitdrukking. Deze uitdrukking levert bij uitrekenen voor ieder formeel getal een eenduidig bepaald reëel getal op. Voor alle formele getallen A noemen we het zojuist omschreven bijbehorende reële getal de *reële waarde* rw(A) van A. Voor het triviale geval dat de resulterende uitdrukking (en dus ook het formele getal) enkel uit een reëel getal bestaat, beschouwen we dit reële getal zelf als de reële waarde.

3. We noemen het formele getal A alleen *inwisselbaar* voor het formele getal B - genoteerd als $A\spadesuit B$ - indien rw(A) = rw(B) en daarbij rw(A) en rw(B) allebei ongelijk aan nul zijn. Die laatste bepaling is toegevoegd omdat we binnen dit systeem “verschillende” nullen willen kunnen onderscheiden.

4. Voor alle reële getallen a en formele getallen A, B en C geldt:

i. $\mathrm{rw}(a) = a$ (getalregel)

ii. $\mathrm{rw}(A \clubsuit B) \; = \; \mathrm{rw}(A) + \mathrm{rw}(B)$ (somregel)

iii. $\mathrm{rw}(A \diamondsuit B) \; = \; \mathrm{rw}(A) \,.\, \mathrm{rw}(B)$ (productregel)

iv. $A \spadesuit B \;\Rightarrow\; B \spadesuit A$ (symmetrie)

v. $A \spadesuit B$ & $B \spadesuit C \;\Rightarrow\; A \spadesuit C$ (transitiviteit)

Opmerking: de inwisselbaarheidsrelatie is niet reflexief zoals men aan het tegenvoorbeeld A = B = 0 eenvoudig na gaat.

Bewijs:

Laat a een reëel getal en A, B en C formele getallen zijn.

i. Uit definitie 2. volgt dan direct:

$\mathrm{rw}(a) = a.$

ii. Eveneens uit definitie 2. volgt dat:

$\mathrm{rw}(A \clubsuit B) \; = \; \mathrm{rw}(A) + \mathrm{rw}(B).$

iii. En uit definitie 2. volgt ook:

$\mathrm{rw}(A \diamondsuit B) \; = \; \mathrm{rw}(A) \,.\, \mathrm{rw}(B).$

iv. Stel dat:

$A \spadesuit B.$

Dit wil volgens definitie 3. zeggen dat rw(A) = rw(B) waarbij rw(A) en rw(B) allebei ongelijk aan nul zijn.

Dan geldt dus ook dat rw(B) = rw(A) waarbij rw(B) en rw(A) allebei ongelijk aan nul zijn. Oftewel:

$B \spadesuit A.$

v. Stel dat:

$A \spadesuit B$ & $B \spadesuit C.$

Volgens definitie 3. moet dan gelden dat rw(A) = rw(B) en rw(B) = rw(C) waarbij rw(A), rw(B) en rw(C) alle ongelijk aan nul zijn.

Dus geldt ook dat rw(A) = rw(C) waarbij rw(A) en rw(C) allebei ongelijk aan nul zijn. Zodat we vinden:

$A \spadesuit C.$

5. We noemen het formele getal A alleen *strikt gelijkaardig* aan het formele getal B - genoteerd als $A \heartsuit_s B$ - in de onderstaande gevallen:

i. A en B zijn identiek.

ii. Er zijn formele getallen E en F zodat: $A = (E)\clubsuit(F)$ en $B = (F)\clubsuit(E)$.

iii. Er zijn formele getallen E en F zodat: $A = (E)\diamondsuit(F)$ en $B = (F)\diamondsuit(E)$.

iv. Er zijn formele getallen E, F en G zodat: $A = (E) \diamondsuit ((F)\clubsuit(G))$ en $B = ((E)\diamondsuit(F)) \clubsuit ((E)\diamondsuit(G))$.

v. Er zijn formele getallen E, F en G zodat: $A = ((E)\diamondsuit(F)) \clubsuit ((E)\diamondsuit(G))$ en $B = (E) \diamondsuit ((F)\clubsuit(G))$.

6. Voor alle formele getallen A geldt:

$A \heartsuit_s A$ (reflexiviteit).

En voor alle formele getallen A en B geldt:

$A \heartsuit_s B \Rightarrow B \heartsuit_s A$ (symmetrie).

Opmerking: de strikte gelijkaardigheid is niet transitief. Een tegenvoorbeeld vormt:

$A = ((1)\diamondsuit(2)) \clubsuit ((1)\diamondsuit(3))$,

$B = (1) \diamondsuit ((2)) \clubsuit (3))$,

$C = ((2) \clubsuit (3)) \diamondsuit (1)$.

Bewijs:

Laat A een formeel getal zijn. Op grond van definitie 5. regel i. geldt dan:

$A \heartsuit_s A$.

Laat A en B formele getallen zijn. Stel nu dat $A \heartsuit_s B$. Dan moet aan minstens één van de voorwaarden i. t/m v. van definitie 5. voldaan zijn. We bezien deze achtereenvolgens.

i. Als A en B identiek zijn, dan zijn ook B en A identiek. Dus dan geldt: $B \heartsuit_s A$.

ii. Als er formele getallen E en F zijn zodat $A = (E)\clubsuit(F)$ en $B = (F)\clubsuit(E)$, dan zijn er eveneens formele getallen F en E zodat $B = (F)\clubsuit(E)$ en $A = (E)\clubsuit(F)$. Dus dan geldt: $B \heartsuit_s A$.

iii. Als er formele getallen E en F zijn zodat $A = (E)\diamondsuit(F)$ en $B = (F)\diamondsuit(E)$, dan zijn er eveneens formele getallen F en E zodat $B = (F)\diamondsuit(E)$ en $A = (E)\diamondsuit(F)$. Dus dan geldt: $B \heartsuit_s A$.

iv. Als er formele getallen E, F en G zijn zodat $A = (E) \diamondsuit ((F)\clubsuit(G))$ en $B = ((E)\diamondsuit(F))\clubsuit((E)\diamondsuit(G))$, dan zijn er eveneens formele getallen E, F en G zodat $B = ((E)\diamondsuit(F))\clubsuit((E)\diamondsuit(G))$ en $A = (E) \diamondsuit ((F)\clubsuit(G))$. Dus geldt volgens regel v. dat: $B \heartsuit_s A$.

v. Als er formele getallen E, F en G zijn zodat $A = ((E)\diamondsuit(F))\clubsuit((E)\diamondsuit(G))$ en $B = (E) \diamondsuit ((F)\clubsuit(G))$, dan zijn er eveneens formele getallen E, F en G zodat $B = (E) \diamondsuit ((F)\clubsuit(G))$ en $A = ((E)\diamondsuit(F))\clubsuit((E)\diamondsuit(G))$. Dus geldt volgens regel iv. dat: $B \heartsuit_s A$.

In alle mogelijke gevallen waarbij $A \heartsuit_s B$, zal dus ook gelden dat: $B \heartsuit_s A$.

7. We noemen het formele getal A alleen *tamelijk gelijkaardig* aan het formele getal B - genoteerd als $A \heartsuit_t B$ - wanneer er formele getallen E en F bestaan waarvoor $E \spadesuit F$ of $E \heartsuit_s F$ zodanig dat er een stukje van A is dat identiek is aan E en dat bij vervanging door F het formele getal A in B omzet. Dit stukje van A mag eventueel heel A zijn.

8. Voor alle formele getallen A geldt:

$A \heartsuit_t A$ (reflexiviteit).

En voor alle formele getallen A en B geldt:

$A \heartsuit_t B \;\Rightarrow\; B \heartsuit_t A$ (symmetrie).

Opmerking: de tamelijke gelijkaardigheid is niet transitief. Zie bijvoorbeeld het onderstaande geval:

$A = ((1)\clubsuit(-1)) \clubsuit ((2)\clubsuit(-2))$,

$B = ((-1)\clubsuit(1)) \clubsuit ((2)\clubsuit(-2))$,

$C = ((-1)\clubsuit(1)) \clubsuit ((-2)\clubsuit(2))$.

Bewijs:

Laat A een formeel getal zijn.

Volgens stelling 6. geldt dan dat: $A \heartsuit_s A$.

Dus bestaan er formele getallen E en F (namelijk E = A en F = A) waarvoor $E \spadesuit F$ of $E \heartsuit_s F$ en zodanig dat wanneer we in A een stukje dat aan E identiek is door F vervangen we B krijgen. We hebben hier immers het (toegestane!) geval dat het stukje van A heel A is.

Uit bovenstaande zien we wegens definitie 7. dat: $A \heartsuit_t A$.

Laat A en B formele getallen zijn waarvoor: $A \heartsuit_t B$.

Dan bestaan er volgens definitie 7. formele getallen E en F waarvoor $E \spadesuit F$ of $E \heartsuit_s F$ en zodanig dat wanneer we in A een stukje dat aan E identiek is door F vervangen we B krijgen.

Dus bestaan er volgens stelling 4. regel iv. en stelling 6. formele getallen F en E waarvoor $F \spadesuit E$ of $F \heartsuit_s E$ en zodanig dat wanneer we in A een stukje dat aan E identiek is door F vervangen we B krijgen.

Tot slot bestaan er dan ook formele getallen F en E waarvoor $F \spadesuit E$ of $F \heartsuit_s E$ en zodanig dat wanneer we in B een stukje dat aan F identiek is door E vervangen we A krijgen.

Zodat wegens definitie 7. geldt: $B \heartsuit_t A$.

9. We noemen het formele getal A alleen *gelijkaardig* aan het formele getal B - genoteerd als $A \heartsuit B$ - indien er een eindige rij formele getallen

$E_1 , E_2 , E_3 , ... , E_{n-1} , E_n$

bestaat zodat:

$E_1 \heartsuit_t E_2 \; ; \; E_2 \heartsuit_t E_3 \; ; \; E_3 \heartsuit_t E_4 \; ; ... ; \; E_{n-1} \heartsuit_t E_n$

en $A = E_1$ & $B = E_n$.

10. Voor alle formele getallen A geldt:

$A \heartsuit A$ (reflexiviteit).

Voor alle formele getallen A en B geldt:

$A \heartsuit B \;\Rightarrow\; B \heartsuit A$ (symmetrie).

En voor alle formele getallen A, B en C geldt:

$A \heartsuit B$ & $B \heartsuit C \;\Rightarrow\; A \heartsuit C$ (transitiviteit).

Wegens bovenstaande drie eigenschappen is de gelijkaardigheid een zogeheten equivalentierelatie.

Bewijs:

Stel dat A een formeel getal is.

Vervolgens kiezen we $E_1 = E_2 = A$, zodat op grond van stelling 8. geldt dat:

$E_1 \heartsuit_t E_2$.

Dan bestaat er een eindige rij formele getallen

$E_1 \; , \; E_2$

zodat:

$E_1 \heartsuit_t E_2$

en $A = E_1$ & $A = E_2$.

Op basis van definitie 9. concluderen we dan tot:

$A \heartsuit A$.

Stel dat voor de formele getallen A en B geldt: $A \heartsuit B$.

Dan bestaat er volgens definitie 9. een eindige rij formele getallen

E_1 , E_2 , E_3 , ... , E_{n-1} , E_n

zodat:

$E_1 \heartsuit_t E_2$; $E_2 \heartsuit_t E_3$; $E_3 \heartsuit_t E_4$; ... ; $E_{n-1} \heartsuit_t E_n$

en $A = E_1$ & $B = E_n$.

Op grond van stelling 8. bestaat er dan ook een eindige rij formele getallen

E_n , E_{n-1} , ... , E_3 , E_2 , E_1

zodat:

$E_n \heartsuit_t E_{n-1}$; ... ; $E_4 \heartsuit_t E_3$; $E_3 \heartsuit_t E_2$; $E_2 \heartsuit_t E_1$

en $B = E_n$ & $A = E_1$.

Op basis van definitie 9. vinden we dan: $B \heartsuit A$.

Stel nu dat voor formele getallen A, B en C geldt dat $A \heartsuit B$ en $B \heartsuit C$.

Op grond van definitie 9. bestaat er dan een eindige rij formele getallen

F_1 , F_2 , F_3 , ... , F_{r-1} , F_r

zodat:

$F_1 \heartsuit_t F_2$; $F_2 \heartsuit_t F_3$; $F_3 \heartsuit_t F_4$; ... ; $F_{r-1} \heartsuit_t F_r$

en $A = F_1$ en $B = F_r$.

En bestaat er tevens een eindige rij formele getallen

G_1 , G_2 , G_3 , ... , G_{s-1} , G_s

zodat:

$G_1 \heartsuit_t G_2$; $G_2 \heartsuit_t G_3$; $G_3 \heartsuit_t G_4$; ... ; $G_{s-1} \heartsuit_t G_s$

en $B = G_1$ en $C = G_s$.

Dus bestaat er een eindige rij formele getallen

F_1 , F_2 , F_3 , ... , F_{r-1} , F_r , G_1 , G_2 , G_3 , ... , G_{s-1} , G_s

zodat:

$F_1 \heartsuit_t F_2$; $F_2 \heartsuit_t F_3$; $F_3 \heartsuit_t F_4$; ... ; $F_{r-1} \heartsuit_t F_r$; $G_1 \heartsuit_t G_2$; $G_2 \heartsuit_t G_3$; $G_3 \heartsuit_t G_4$; ... ; $G_{s-1} \heartsuit_t G_s$

en $A = F_1$ & $B = F_r$ & $B = G_1$ & $C = G_s$.

Omdat F_r via B gelijk is aan G_1 concluderen we dat er een eindige rij formele getallen

F_1 , F_2 , F_3 , ... , F_{r-1} , G_1 , G_2 , G_3 , ... , G_{s-1} , G_s

bestaat zodat:

$F_1 \heartsuit_t F_2$; $F_2 \heartsuit_t F_3$; $F_3 \heartsuit_t F_4$; ... ; $F_{r-1} \heartsuit_t G_1$; $G_1 \heartsuit_t G_2$; $G_2 \heartsuit_t G_3$; $G_3 \heartsuit_t G_4$; ... ; $G_{s-1} \heartsuit_t G_s$

en $A = F_1$ & $C = G_s$.

Hieruit volgt wegens definitie 9. dat: $A \heartsuit C$.

11. Voor alle formele getallen A en B geldt:

i. $A \spadesuit B \Rightarrow A \heartsuit_t B$.

ii. $A \heartsuit_s B \Rightarrow A \heartsuit_t B$.

iii. $A \heartsuit_t B \Rightarrow A \heartsuit B$.

Bewijs:

Laat A en B formele getallen zijn zodat:

$A \spadesuit B$.

Dan zijn er formele getallen E en F (namelijk E = A en F = B) waarvoor $E \spadesuit F$ of $E \heartsuit_s F$ zodanig dat er een stukje van A is dat identiek is aan E en dat bij vervanging door F het formele getal A in B omzet. (Dit stukje van A is in dit geval heel A.)

Volgens definitie 7. geldt dan:

$A \heartsuit_t B$.

Laat A en B formele getallen zijn zodat:

$A \heartsuit_s B$.

Dan zijn er formele getallen E en F (namelijk E = A en F = B) waarvoor $E \spadesuit F$ of $E \heartsuit_s F$ zodanig dat er een stukje van A is dat identiek is aan E en dat bij vervanging door F het formele getal A in B omzet. (Dit stukje van A is ook hier heel A.)

Volgens definitie 7. geldt wederom:

$A \heartsuit_t B$.

Laat A en B formele getallen zijn waarvoor:

$A \heartsuit_t B$.

Neem nu $E_1 = A$ en $E_2 = B$.

Dan is er een eindige rij formele getallen E_1 , E_2 zodat: $E_1 \heartsuit_t E_2$ en $A = E_1$ & $B = E_2$.

Op grond van definitie 9. geldt dan:

$A \heartsuit B$.

12. Voor alle formele getallen K, L en M geldt:

$K \heartsuit_t L \;\Rightarrow\; (K)\clubsuit(M) \heartsuit_t (L)\clubsuit(M)$.

Bewijs:

Laat K, L en M formele getallen zijn waarvoor geldt:

$K \heartsuit_t L$.

Dan moeten er op grond van definitie 7. formele getallen E en F bestaan waarvoor $E \spadesuit F$ of $E \heartsuit_s F$ zodanig dat er een stukje van K is dat identiek is aan E en dat bij vervanging door F het formele getal K in L omzet.

Bijgevolg moeten er dan formele getallen E en F bestaan waarvoor $E \spadesuit F$ of $E \heartsuit_s F$ zodanig dat er een stukje van $(K)\clubsuit(M)$ is dat identiek is aan E en dat bij vervanging door F het formele getal $(K)\clubsuit(M)$ in $(L)\clubsuit(M)$ omzet.

Waaruit we op basis van definitie 7. concluderen dat:

$(K)\clubsuit(M) \heartsuit_t (L)\clubsuit(M)$.

13. Voor alle formele getallen K, L en M geldt:

$K \heartsuit L \;\Rightarrow\; (K)\clubsuit(M) \heartsuit (L)\clubsuit(M)$.

Bewijs:

Stel dat K, L en M formele getallen zijn waarvoor:

$K \heartsuit L$.

Dan bestaat er op grond van definitie 9. een eindige rij formele getallen

$E_1 , E_2 , E_3 , \ldots , E_{n-1} , E_n$

zodat:

$E_1 \heartsuit_t E_2$; $E_2 \heartsuit_t E_3$; $E_3 \heartsuit_t E_4$; ... ; $E_{n-1} \heartsuit_t E_n$

en $K = E_1$ & $L = E_n$.

Dus bestaat er wegens stelling 12. ook een eindige rij formele getallen

$(E_1)\clubsuit(M)$, $(E_2)\clubsuit(M)$, $(E_3)\clubsuit(M)$, ... , $(E_{n-1})\clubsuit(M)$, $(E_n)\clubsuit(M)$

zodat:

$(E_1)\clubsuit(M) \heartsuit_t (E_2)\clubsuit(M)$; $(E_2)\clubsuit(M) \heartsuit_t (E_3)\clubsuit(M)$; $(E_3)\clubsuit(M) \heartsuit_t (E_4)\clubsuit(M)$; ... ; $(E_{n-1})\clubsuit(M) \heartsuit_t (E_n)\clubsuit(M)$

en

$(K)\clubsuit(M) = (E_1)\clubsuit(M)$ & $(L)\clubsuit(M) = (E_n)\clubsuit(M)$.

Zodat op basis van definitie 9. geldt:

$(K)\clubsuit(M) \heartsuit (L)\clubsuit(M)$.

14. Voor alle formele getallen A, A', B en B' geldt:

$A \heartsuit A'$ & $B \heartsuit B' \;\Rightarrow\; (A)\clubsuit(B) \heartsuit (A')\clubsuit(B')$.

Bewijs:

Laat A, A', B en B' formele getallen zijn waarvoor:

$A \heartsuit A'$ & $B \heartsuit B'$.

Wegens stelling 13. geldt dan:

$(A)\clubsuit(B) \heartsuit (A')\clubsuit(B)$ (α),

$(B)\clubsuit(A') \heartsuit (B')\clubsuit(A')$ (γ).

Voor alle formele getallen C en D vinden we op grond van definitie 5. regel ii. en stelling 11. regel ii. en iii. dat:

$(C)\clubsuit(D) \heartsuit_s (D)\clubsuit(C)$,

$(C)\clubsuit(D) \heartsuit_t (D)\clubsuit(C)$,

$(C)\clubsuit(D) \heartsuit (D)\clubsuit(C)$.

En dus in het bijzonder:

$(A')\clubsuit(B) \heartsuit (B)\clubsuit(A')$ (β),

$(B')\clubsuit(A') \heartsuit (A')\clubsuit(B')$ (δ).

Met behulp van stelling 10. en de resultaten (α), (β), (γ) en (δ) vinden we dan achtereenvolgens:

$(A)\clubsuit(B) \heartsuit (A')\clubsuit(B)$

$(A)\clubsuit(B) \heartsuit (B)\clubsuit(A')$

$(A)\clubsuit(B) \heartsuit (B')\clubsuit(A')$

$(A)\clubsuit(B) \heartsuit (A')\clubsuit(B')$.

15. Voor alle formele getallen K, L en M geldt:

$K \heartsuit_t L \ \Rightarrow\ (K)\diamondsuit(M) \heartsuit_t (L)\diamondsuit(M)$.

Bewijs:

Laat K, L en M formele getallen zijn waarvoor geldt:

$K \heartsuit_t L$.

Dan moeten er op grond van definitie 7. formele getallen E en F bestaan waarvoor $E \spadesuit F$ of $E \heartsuit_s F$ zodanig dat er een stukje van K is dat identiek is aan E en dat bij vervanging door F het formele getal K in L omzet.

Bijgevolg moeten er dan formele getallen E en F bestaan waarvoor $E \spadesuit F$ of $E \heartsuit_s F$ zodanig dat er een stukje van $(K)\diamondsuit(M)$ is dat identiek is aan E en dat bij vervanging door F het formele getal $(K)\diamondsuit(M)$ in $(L)\diamondsuit(M)$ omzet.

Waaruit we op basis van definitie 7. concluderen dat:

$(K)\diamondsuit(M) \heartsuit_t (L)\diamondsuit(M)$.

16. Voor alle formele getallen K, L en M geldt:

$K \heartsuit L \ \Rightarrow\ (K)\diamondsuit(M) \heartsuit (L)\diamondsuit(M)$.

Bewijs:

Stel dat K, L en M formele getallen zijn waarvoor:

$K \heartsuit L$.

Dan bestaat er op grond van definitie 9. een eindige rij formele getallen

$E_1 , E_2 , E_3 , \ldots , E_{n-1} , E_n$

zodat:

$E_1 \heartsuit_t E_2 ; E_2 \heartsuit_t E_3 ; E_3 \heartsuit_t E_4 ; \ldots ; E_{n-1} \heartsuit_t E_n$

en $K = E_1$ & $L = E_n$.

Dus bestaat er wegens stelling 15. ook een eindige rij formele getallen

$(E_1)\diamondsuit(M)\,,\ (E_2)\diamondsuit(M)\,,\ (E_3)\diamondsuit(M)\,,\ \ldots\,,\ (E_{n-1})\diamondsuit(M)\,,\ (E_n)\diamondsuit(M)$

zodat:

$(E_1)\diamondsuit(M)\,\heartsuit_t\,(E_2)\diamondsuit(M)\,;\ (E_2)\diamondsuit(M)\,\heartsuit_t\,(E_3)\diamondsuit(M)\,;\ (E_3)\diamondsuit(M)\,\heartsuit_t\,(E_4)\diamondsuit(M)\,;\ \ldots$
$;\ (E_{n-1})\diamondsuit(M)\,\heartsuit_t\,(E_n)\diamondsuit(M)$

en

$(K)\diamondsuit(M) = (E_1)\diamondsuit(M)\ \&\ (L)\diamondsuit(M) = (E_n)\diamondsuit(M)$.

Zodat op basis van definitie 9. geldt:

$(K)\diamondsuit(M)\,\heartsuit\,(L)\diamondsuit(M)$.

17. Voor alle formele getallen A, A', B en B' geldt:

$A\,\heartsuit\,A'\ \&\ B\,\heartsuit B'\ \Rightarrow\ (A)\diamondsuit(B)\,\heartsuit\,(A')\diamondsuit(B')$.

Bewijs:

Laat A, A', B en B' formele getallen zijn waarvoor:

$A\,\heartsuit A'\ \&\ B\,\heartsuit B'$.

Wegens stelling 16. geldt dan:

$(A)\diamondsuit(B)\,\heartsuit\,(A')\diamondsuit(B)\ \ (\alpha)$,

$(B)\diamondsuit(A')\,\heartsuit\,(B')\diamondsuit(A')\ \ (\gamma)$.

Voor alle formele getallen C en D vinden we op grond van definitie 5. regel iii. en stelling 11. regel ii. en iii. dat:

$(C)\diamondsuit(D)\,\heartsuit_s\,(D)\diamondsuit(C)$,

$(C)\diamondsuit(D)\,\heartsuit_t\,(D)\diamondsuit(C)$,

$(C)\diamondsuit(D)\,\heartsuit\,(D)\diamondsuit(C)$.

En dus in het bijzonder:

$(A')\diamondsuit(B)\,\heartsuit\,(B)\diamondsuit(A')\ \ (\beta)$,

$(B')\diamondsuit(A')\,\heartsuit\,(A')\diamondsuit(B')\ \ (\delta)$.

Met behulp van stelling 10. en de resultaten (α), (β), (γ) en (δ) vinden we dan achtereenvolgens:

$(A)\diamondsuit(B)\,\heartsuit\,(A')\diamondsuit(B)$

$(A)\diamondsuit(B)\,\heartsuit\,(B)\diamondsuit(A')$

$(A)\diamondsuit(B)\,\heartsuit\,(B')\diamondsuit(A')$

$(A)\diamondsuit(B)\,\heartsuit\,(A')\diamondsuit(B')$.

Hoofdstuk 3

Metaformele getallen

Nu eerst wat theorie over equivalentieklassen en quotiëntverzamelingen.

18a. Laat A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Dan definiëren we voor alle x in A de *equivalentieklasse* $[x]_\sim$ van A onder $\sim$ als:

$[x]_\sim = \{y \in A \mid y \sim x\}$.

En *alleen* zulke verzamelingen noemen we hier equivalentieklassen. Equivalentieklassen zijn dus - per definitie - nooit leeg. Als X een dergelijke equivalentieklasse is dan noemen we een z uit A alleen dan een *representant* van X als:

$X = [z]_\sim$.

Iedere equivalentieklasse heeft dus - eveneens per definitie - minstens één representant.

18b. Laat A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Dan geldt voor alle x in A dat:

$x \ \in \ [x]_\sim$.

Bewijs: Laat zoals hierboven A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Voor alle x in A geldt dan dat: $x \sim x$ (reflexiviteit). Zodat:

$x \in A \;\&\; x \sim x$.

Wegens definitie 18a. geldt dan ook:

$x \ \in \ [x]_\sim$.

18c. Laat A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Voor alle x en y in A geldt dan:

$x \sim y \;\Leftrightarrow\; [x]_\sim = [y]_\sim.$

Bewijs: Laat A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A.

Stel voor het bewijs van de rechtse implicatie dat voor x en y in A geldt: $x \sim y$. Dan geldt voor alle z in A dat:

$z \in [x]_\sim \;\Rightarrow\; z \sim x$ (wegens 18a.)

$z \in [x]_\sim \;\Rightarrow\; z \sim y$ (transitiviteit)

$z \in [x]_\sim \;\Rightarrow\; z \in [y]_\sim$ (wegens 18a.).

$z \in [y]_\sim \;\Rightarrow\; z \sim y$ (wegens 18a.)

$z \in [y]_\sim \;\Rightarrow\; z \sim x$ (symmetrie & transitiviteit)

$z \in [y]_\sim \;\Rightarrow\; z \in [x]_\sim$ (wegens 18a.).

Dus:

$z \in [x]_\sim \;\Leftrightarrow\; z \in [y]_\sim.$

Omdat $[x]_\sim$ en $[y]_\sim$ wegens 18a. deelverzamelingen van A zijn, geldt dus ook:

$x \sim y \;\Rightarrow\; [x]_\sim = [y]_\sim.$

Stel nu voor het bewijs van de linkse implicatie dat voor x en y in A geldt: $[x]_\sim = [y]_\sim$. Dan geldt wegens 18b. dat:

$x \in [x]_\sim.$

Zodat:

$x \in [y]_\sim.$

Wegens 18a. vinden we dan:

$x \sim y.$

18d. Laat A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Voor alle x, y en z in A geldt dan:

$x \sim y \;\Leftrightarrow\; (\exists z)[\, x \in [z]_\sim \;\&\; y \in [z]_\sim \,].$

Bewijs: Laat weer A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Verder gaan we ervan uit dat x, y en z elementen van A zijn.

Voor het bewijs van de rechtse implicatie nemen we aan dat: $x \sim y$. Dan geldt:

$x \in [x]_\sim$ (wegens 18b.)

$y \in [x]_\sim$ (wegens symmetrie & 18a.).

En dus:

$(\exists z)[\, x \in [z]_\sim \;\&\; y \in [z]_\sim \,]$.

Voor het bewijs van de linkse implicatie nemen we aan dat:

$(\exists z)[\, x \in [z]_\sim \;\&\; y \in [z]_\sim \,]$.

Zodat:

$(\exists z)[\, x \sim z \;\&\; y \sim z \,]$ (wegens 18a.)

$(\exists z)[\, x \sim z \;\&\; z \sim y \,]$ (symmetrie)

$x \sim y$ (transitiviteit).

18e. Laat A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Voor alle x, y en z in A geldt dan:

$x \in [y]_\sim \;\&\; x \in [z]_\sim \;\;\Rightarrow\;\; [y]_\sim = [z]_\sim$.

Bewijs: Laat A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Verder nemen we aan dat er x, y en z in A zijn zodanig dat:

$x \in [y]_\sim \;\&\; x \in [z]_\sim$.

Er geldt dan:

$x \sim y \;\&\; x \sim z$ (wegens 18a.)

$y \sim x \;\&\; x \sim z$ (symmetrie)

$y \sim z$ (transitiviteit)

$[y]_\sim = [z]_\sim$ (wegens 18c.).

18f. Twee equivalentieklassen van een niet-lege verzameling A onder een equivalentierelatie $\sim$ zijn ofwel gelijk ofwel disjunct.

Bewijs: Twee equivalentieklassen X en Y van een niet-lege verzameling A onder een equivalentierelatie $\sim$ hebben ofwel een gemeenschappelijk element z ofwel ze hebben geen gemeenschappelijk element z. In het tweede geval zijn ze disjunct, dus hoeven we alleen het eerste geval nog te onderzoeken. Daartoe nemen we aan dat de twee equivalentieklassen X en Y een gemeenschappelijk element z hebben. Oftewel:

$z \in X \;\&\; z \in Y$.

Equivalentieklassen zijn per definitie nooit leeg (zie 18a.), dus mogen we aannemen dat er ook nog x en y in A zijn zodat:

$X = [x]_\sim \;\&\; Y = [y]_\sim$.

Tezamen genomen geeft dit:

$z \in [x]_\sim \ \& \ z \in [y]_\sim$.

Waaruit wegens 18e. volgt:

$[x]_\sim \ = \ [y]_\sim$.

En dus:

$X = Y$.

Inderdaad zijn dus twee equivalentieklassen van een niet-lege verzameling A onder een equivalentie relatie $\sim$ ofwel gelijk ofwel disjunct.

18g. Laat A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. De *quotiëntverzameling* $A/\sim$ van A onder $\sim$ definiëren we dan als:

$A/\sim \ = \ \{X \in \mathcal{P}(A) \mid (\exists x)[\, x \in A \ \& \ X = [x]_\sim\}$.

18h. Onder een *partitie* van een niet-lege verzameling A verstaan we een verzameling van onderling disjuncte niet-lege deelverzamelingen van A zodanig dat de vereniging van al die deelverzamelingen precies A is.

18i. Laat A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Dan is de quotiëntverzameling $A/\sim$ een partitie van A.

Bewijs: Laat A weer een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. Dan bestaat $A/\sim$ per definitie uit niet-lege deelverzamelingen van A (zie 18a. en 18g.). Volgens 18f. zijn deze deelverzamelingen bovendien onderling disjunct. Uit 18b. en 18g. volgt verder nog dat er voor ieder element van A een equivalentieklasse in $A/\sim$ te vinden is waar dat element in zit. Dus vormt de vereniging van al de equivalentieklassen in $A/\sim$ precies A. Bijgevolg voldoet $A/\sim$ aan al de voorwaarden voor een partitie van A.

18j. Laat A een niet-lege verzameling zijn, en $\sim$ een equivalentierelatie op A. We bekijken het geval dat er voor alle elementen x en y van A een som x+y en een product x.y zijn gedefinieerd, en dat voor alle x, x', y en y' in A geldt dat:

$x \sim x' \ \& \ y \sim y' \ \ \Rightarrow \ \ x + y \ \sim \ x' + y'$,

$x \sim x' \ \& \ y \sim y' \ \ \Rightarrow \ \ x \,.\, y \ \sim \ x'.y'$.

Op basis van 18c. vinden we dan:

$[x]_\sim = [x']_\sim \ \& \ [y]_\sim = [y']_\sim \ \ \Rightarrow \ \ [x+y]_\sim \ = \ [x'+y']_\sim \ \ (^*)$,

$[x]_\sim = [x']_\sim \ \& \ [y]_\sim = [y']_\sim \ \ \Rightarrow \ \ [x.y]_\sim \ = \ [x'.y']_\sim \ \ (^{**})$.

Nu kunnen we voor de equivalentieklassen P en Q in $A/\sim$ een eenduidige som en een eenduidig product definiëren. Omdat equivalentieklassen per definitie nooit leeg zijn (zie 18a.), bestaan er voor alle equivalentieklassen P en Q in $A/\sim$ ook elementen p en q van A zodat:

$P = [p]_\sim$ & $Q = [q]_\sim$.

De som P+Q en het product P.Q definiëren we respectievelijk als:

$[p]_\sim + [q]_\sim \; = \; [p+q]_\sim$,

$[p]_\sim \,.\, [q]_\sim \; = \; [p.q]_\sim$.

De som en het product kunnen dus voor alle equivalentieklassen P en Q in $A/\sim$ gevormd worden. Op grond van (*) en (**) zijn de som en het product onafhankelijk van de keuze van de representanten p en q, en dus eenduidig bepaald.

19. De quotiëntverzameling $\mathfrak{F}/\heartsuit$ van de verzameling der formele getallen $\mathfrak{F}$ onder de gelijkaardigheidsrelatie $\heartsuit$ geven we weer als $\mathfrak{M}$. Omdat de verzameling der formele getallen $\mathfrak{F}$ niet leeg is (zie 1.) en de gelijkaardigheid wegens stelling 10. een equivalentierelatie op $\mathfrak{F}$ is, kunnen we de genoemde quotiëntverzameling op basis van definitie 18g. inderdaad vormen. De elementen van $\mathfrak{M}$ noemen we *metaformele getallen.* $\mathfrak{M}$ is dus de *verzameling der metaformele getallen.*

De *som* en het *product* van twee metaformele getallen $X = [A]_\heartsuit$ en $Y = [B]_\heartsuit$ definiëren we respectievelijk als:

$[A]_\heartsuit + [B]_\heartsuit \; = \; [(A)\clubsuit(B)]_\heartsuit$,

$[A]_\heartsuit \,.\, [B]_\heartsuit \; = \; [(A)\diamondsuit(B)]_\heartsuit$.

Deze definitie van de som en het product van metaformele getallen levert wegens definitie 1. stellingen 10., 14. en 17. en definitie 18j. voor alle metaformele getallen X en Y een uitkomst op, en die uitkomst is ook eenduidig bepaald. (Formele getallen A en B waarvoor $X = [A]_\heartsuit$ en $Y = [B]_\heartsuit$ bestaan er immers voor alle metaformele getallen X en Y omdat equivalentieklassen nooit leeg zijn (zie 18a.), en de *keuze* van representanten A en B maakt voor de *uitkomsten* van som en product niet uit.)

20. Voor alle metaformele getallen X, Y en Z geldt:

i. X + Y = Y + X .

ii. X . Y = Y . X .

iii. X . (Y + Z) = (X.Y) + (X.Z) .

iv. (Y + Z) . X = (Y.X) + (Z.X) .

Met andere woorden: $(\mathfrak{M}, +\, , \, .\,)$ is een (additief en multiplicatief) commutatieve ringoïde.

Bewijs: Laat X, Y en Z metaformele getallen zijn. Omdat er voor iedere equivalentieklasse altijd minstens één representant bestaat (zie 18a.), zijn er dan formele getallen A, B en C zodat:

$X = [A]_\heartsuit \;\;\&\;\; Y = [B]_\heartsuit \;\;\&\;\; Z = [C]_\heartsuit.$

We zullen nu achtereenvolgens i. t/m iv. bewijzen:

i. Voor metaformele getallen X en Y met bijbehorende formele getallen A en B geldt:

$(A)\clubsuit(B) \heartsuit_s (B)\clubsuit(A)$ (zie 5. regel ii.)

$(A)\clubsuit(B) \heartsuit_t (B)\clubsuit(A)$ (zie 11. regel ii.)

$(A)\clubsuit(B) \heartsuit (B)\clubsuit(A)$ (zie 11. regel iii.)

$[(A)\clubsuit(B)]_\heartsuit \;=\; [(B)\clubsuit(A)]_\heartsuit$ (zie 18c.)

$[A]_\heartsuit + [B]_\heartsuit \;=\; [B]_\heartsuit + [A]_\heartsuit$ (zie 19.)

$X + Y = Y + X.$

ii. Voor metaformele getallen X en Y met bijbehorende formele getallen A en B geldt:

$(A)\diamondsuit(B) \heartsuit_s (B)\diamondsuit(A)$ (zie 5. regel iii.)

$(A)\diamondsuit(B) \heartsuit_t (B)\diamondsuit(A)$ (zie 11. regel ii.)

$(A)\diamondsuit(B) \heartsuit (B)\diamondsuit(A)$ (zie 11. regel iii.)

$[(A)\diamondsuit(B)]_\heartsuit \;=\; [(B)\diamondsuit(A)]_\heartsuit$ (zie 18c.)

$[A]_\heartsuit \,.\, [B]_\heartsuit \;=\; [B]_\heartsuit \,.\, [A]_\heartsuit$ (zie 19.)

$X \,.\, Y \;=\; Y \,.\, X.$

iii. Voor metaformele getallen X, Y en Z met bijbehorende formele getallen A, B en C geldt:

$(A) \diamondsuit ((B) \clubsuit (C)) \heartsuit_s ((A)\diamondsuit(B)) \clubsuit ((A)\diamondsuit(C))$ (zie 5. regel iv.)

$(A) \diamondsuit ((B) \clubsuit (C)) \heartsuit_t ((A)\diamondsuit(B)) \clubsuit ((A)\diamondsuit(C))$ (zie 11. regel ii.)

$(A) \diamondsuit ((B) \clubsuit (C)) \heartsuit ((A)\diamondsuit(B)) \clubsuit ((A)\diamondsuit(C))$ (zie 11. regel iii.)

$[(A) \diamondsuit ((B) \clubsuit (C))]_\heartsuit \;=\; [((A)\diamondsuit(B)) \clubsuit ((A)\diamondsuit(C))]_\heartsuit$ (zie 18c.)

$[A]_\heartsuit \,.\, [(B) \clubsuit (C)]_\heartsuit \;=\; [(A)\diamondsuit(B)]_\heartsuit \;+\; [(A)\diamondsuit(C)]_\heartsuit$ (zie 19.)

$[A]_\heartsuit \,.\, ([B]_\heartsuit + [C]_\heartsuit) \;=\; ([A]_\heartsuit \,.\, [B]_\heartsuit) \;+\; ([A]_\heartsuit \,.\, [C]_\heartsuit)$ (zie 19.)

$X \,.\, (Y + Z) \;=\; (X.Y) + (X.Z).$

iv. Voor het gemak zullen we deze laatste regel met behulp van de hierboven bewezen regels ii. en iii. bewijzen. Voor alle metaformele getallen X, Y en Z geldt:

$(Y + Z) . X = X . (Y + Z)$ (zie ii.)

$(Y + Z) . X = (X.Y) + (X.Z)$ (zie iii.)

$(Y + Z) . X = (Y.X) + (Z.X)$ (zie ii.).

Hoofdstuk 4

Dikke en dunne getallen

21. Voor alle formele getallen C en D geldt:

i. $C \spadesuit D \;\Rightarrow\; \mathrm{rw}(C) = \mathrm{rw}(D)$.

ii. $C \heartsuit_s D \;\Rightarrow\; \mathrm{rw}(C) = \mathrm{rw}(D)$.

Bewijs:

Uit definitie 3. volgt direct dat voor alle formele getallen C en D geldt:

$C \spadesuit D \;\Rightarrow\; \mathrm{rw}(C) = \mathrm{rw}(D)$.

Volgens definitie 5. geldt voor de formele getallen C en D alleen $C \heartsuit_s D$ in de onderstaande gevallen:

i. C en D zijn identiek.

ii. Er zijn formele getallen E en F zodat: $C = (E)\clubsuit(F)$ en $D = (F)\clubsuit(E)$.

iii. Er zijn formele getallen E en F zodat: $C = (E)\diamondsuit(F)$ en $D = (F)\diamondsuit(E)$.

iv. Er zijn formele getallen E, F en G zodat: $C = (E) \diamondsuit ((F)\clubsuit(G))$ en $D = ((E)\diamondsuit(F)) \clubsuit ((E)\diamondsuit(G))$.

v. Er zijn formele getallen E, F en G zodat: $C = ((E)\diamondsuit(F)) \clubsuit ((E)\diamondsuit(G))$ en $D = (E) \diamondsuit ((F)\clubsuit(G))$.

We bekijken nu achtereenvolgens deze vijf gevallen:

i. Als C en D identiek zijn geldt uiteraard rw(C) = rw(D).

ii. Stel dat er formele getallen E en F zijn zodat:

$C = (E)\clubsuit(F) \;\;\&\;\; D = (F)\clubsuit(E)$.

Dan geldt volgens stelling 4. regel ii. dat:

$\mathrm{rw}(C) = \mathrm{rw}(E) + \mathrm{rw}(F) \;\;\&\;\; \mathrm{rw}(D) = \mathrm{rw}(F) + \mathrm{rw}(E)$.

Dus:

$\text{rw}(C) = \text{rw}(D)$.

iii. Stel dat er formele getallen E en F zijn zodat:

$C = (E)\diamondsuit(F) \;\; \& \;\; D = (F)\diamondsuit(E)$.

Dan geldt volgens stelling 4. regel iii. dat:

$\text{rw}(C) = \text{rw}(E) \,.\, \text{rw}(F) \;\; \& \;\; \text{rw}(D) = \text{rw}(F) \,.\, \text{rw}(E)$.

Dus:

$\text{rw}(C) = \text{rw}(D)$.

iv. Stel dat er formele getallen E, F en G zijn zodat:

$C = (E) \diamondsuit ((F)\clubsuit(G)) \;\; \& \;\; D = ((E)\diamondsuit(F)) \clubsuit ((E)\diamondsuit(G))$.

Dan geldt volgens stelling 4. regels ii. en iii. dat:

$\text{rw}(C) = \text{rw}(E) \,.\, \text{rw}((F)\clubsuit(G)) \;\; \& \;\; \text{rw}(D) = \text{rw}((E)\diamondsuit(F)) \; + \; \text{rw}((E)\diamondsuit(G))$

$\text{rw}(C) = \text{rw}(E) \,.\, (\text{rw}(F) + \text{rw}(G)) \;\; \& \;\; \text{rw}(D) = \text{rw}(E) \,.\, \text{rw}(F) \; + \; \text{rw}(E) \,.\, \text{rw}(G)$.

Dus:

$\text{rw}(C) = \text{rw}(D)$.

v. Stel dat er formele getallen E, F en G zijn zodat:

$C = ((E)\diamondsuit(F)) \clubsuit ((E)\diamondsuit(G)) \;\; \& \;\; D = (E) \diamondsuit ((F)\clubsuit(G))$.

Dan geldt volgens stelling 4. regels ii. en iii. dat:

$\text{rw}(C) = \text{rw}((E)\diamondsuit(F)) \; + \; \text{rw}((E)\diamondsuit(G)) \;\; \& \;\; \text{rw}(D) = \text{rw}(E) \,.\, \text{rw}((F)\clubsuit(G))$

$\text{rw}(C) = \text{rw}(E) \,.\, \text{rw}(F) \; + \; \text{rw}(E) \,.\, \text{rw}(G) \;\; \& \;\; \text{rw}(D) = \text{rw}(E) \,.\, (\text{rw}(F) + \text{rw}(G))$.

Dus:

$\text{rw}(C) = \text{rw}(D)$.

Waarmee is bewezen dat uit alle vijf de gevallen volgt dat:

$\text{rw}(C) = \text{rw}(D)$.

22. Voor alle formele getallen A en B geldt:

$A \heartsuit_t B \;\; \Rightarrow \;\; \text{rw}(A) = \text{rw}(B)$.

Bewijs:

Volgens definitie 7. geldt voor formele getallen A en B alleen $A \heartsuit_t B$ wanneer er formele getallen E en F bestaan waarvoor $E \spadesuit F$ of $E \heartsuit_s F$ zodanig dat er een stukje van A is dat identiek is aan E en dat bij vervanging door F het formele getal A in B omzet. En dit stukje van A mag eventueel heel A zijn.

Op grond van definitie 2. en stelling 21. blijft de reële waarde van een formeel getal door een dergelijke vervanging onveranderd. Dus moet gelden:

$A \heartsuit_t B \;\Rightarrow\; \mathrm{rw}(A) \,=\, \mathrm{rw}(B).$

23. Voor alle formele getallen A en B geldt:

$A \heartsuit B \;\Rightarrow\; \mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B).$

Bewijs:

Wegens definitie 9. geldt voor formele getallen A en B alleen $A \heartsuit B$ indien er een eindige rij formele getallen

$E_1\,,\,E_2\,,\,E_3\,,\,...\,,\,E_{n-1}\,,\,E_n$

bestaat zodat:

$E_1 \heartsuit_t E_2\ ;\ E_2 \heartsuit_t E_3\ ;\ E_3 \heartsuit_t E_4\ ;\ ...\ ;\ E_{n-1} \heartsuit_t E_n$

en $A = E_1$ & $B = E_n$.

Bovenstaande definitie 9. leidt tezamen met stelling 22. tot de conclusie dat indien voor formele getallen A en B geldt dat $A \heartsuit B$ er dan een eindige rij formele getallen

$E_1\,,\,E_2\,,\,E_3\,,\,...\,,\,E_{n-1}\,,\,E_n$

bestaat waarvoor:

$\mathrm{rw}(E_1) = \mathrm{rw}(E_2)\ ;\ \mathrm{rw}(E_2) = \mathrm{rw}(E_3)\ ;\ \mathrm{rw}(E_3) = \mathrm{rw}(E_4)\ ;\ ...$
$;\ \mathrm{rw}(E_{n-1}) = \mathrm{rw}(E_n)$

en $A = E_1$ & $B = E_n$.

Zodat:

$A \heartsuit B \;\Rightarrow\; \mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B).$

24. Voor alle formele getallen A en B geldt:

$\mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B)\ \&\ \mathrm{rw}(A) \neq 0\ \&\ \mathrm{rw}(B) \neq 0 \;\Rightarrow\; A \heartsuit B.$

Bewijs:

Wegens definitie 3. geldt voor alle formele getallen A en B dat:

$\mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B)\ \&\ \mathrm{rw}(A) \neq 0\ \&\ \mathrm{rw}(B) \neq 0 \;\Rightarrow\; A \spadesuit B.$

Dus:

$\mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B)\ \&\ \mathrm{rw}(A) \neq 0\ \&\ \mathrm{rw}(B) \neq 0 \;\;\Rightarrow\;\; A \heartsuit_t B$ (zie 11. regel i.)

$\mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B)\ \&\ \mathrm{rw}(A) \neq 0\ \&\ \mathrm{rw}(B) \neq 0 \;\;\Rightarrow\;\; A \heartsuit B$ (zie 11. regel iii.).

25. Het formele getal 0 is alleen gelijkaardig aan het formele getal 0 zelf.

Bewijs:

Er zijn geen formele getallen A zodat $0 \spadesuit A$ (zie 2. en 3.).

Er zijn geen formele getallen B ongelijk aan 0 waarvoor: $0 \heartsuit_s B$ (zie 5.).

Er zijn geen formele getallen C ongelijk aan 0 waarvoor: $0 \heartsuit_t C$ (zie 7.).

Het formele getal 0 is dus alleen gelijkaardig aan het formele getal 0 zelf (zie 9.).

26. Voor alle formele getallen A noemen we de equivalentieklasse $[A]_\heartsuit$ van $\mathfrak{F}$ onder $\heartsuit$ de *metaformele waardering* mw(A) van A. Soms zullen we de metaformele waardering van A om typografische redenen ook als $\ulcorner A \urcorner$ noteren.

27. Neem aan dat A, B en C formele getallen zijn. Dan geldt:

i. $A \in \mathrm{mw}(A)$.

ii. $A \heartsuit B \;\Leftrightarrow\; \mathrm{mw}(A) = \mathrm{mw}(B)$.

iii. $A \heartsuit B \;\Leftrightarrow\; (\exists C)[\, A \in \mathrm{mw}(C)\ \&\ B \in \mathrm{mw}(C)\,]$.

iv. $A \in \mathrm{mw}(B)\ \&\ A \in \mathrm{mw}(C) \;\Rightarrow\; \mathrm{mw}(B) = \mathrm{mw}(C)$.

En verder:

v. Twee metaformele getallen zijn ofwel gelijk ofwel disjunct.

vi. De verzameling der metaformele getallen $\mathfrak{M}$ is een partitie van de verzameling der formele getallen $\mathfrak{F}$.

Bewijs:

Om te beginnen nemen we aan dat A, B en C formele getallen zijn. Dan volgt direct dat de regels i. t/m iv. gelden. Namelijk:

i. Op basis van stellingen 10. en 18b. en definitie 26.

ii. Op basis van stellingen 10. en 18c. en definitie 26.

iii. Op basis van stellingen 10. en 18d. en definitie 26.

iv. Op basis van stellingen 10. en 18e. en definitie 26.

Los daarvan is het duidelijk dat ook de regels v. en vi. correct zijn:

v. Op basis van stelling 18f. en definitie 19.

vi. Op basis van stelling 18i. en definitie 19.

28. Neem aan dat A, B en C formele getallen zijn. Dan geldt:

i. $\mathrm{mw}(A) = \mathrm{mw}(B) \;\Rightarrow\; \mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B)$.

ii. $(\exists C)[\, A \in \mathrm{mw}(C) \;\&\; B \in \mathrm{mw}(C)\,] \;\Rightarrow\; \mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B)$.

iii. $\mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B) \;\&\; \mathrm{rw}(A) \neq 0 \;\&\; \mathrm{rw}(B) \neq 0 \;\Rightarrow$
$\mathrm{mw}(A) = \mathrm{mw}(B)$.

iv. $\mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B) \;\&\; \mathrm{rw}(A) \neq 0 \;\&\; \mathrm{rw}(B) \neq 0 \;\Rightarrow$
$(\exists C)[\, A \in \mathrm{mw}(C) \;\&\; B \in \mathrm{mw}(C)\,]$.

Bewijs:

We nemen aan dat A, B en C formele getallen zijn. Dan volgt direct dat de regels i. t/m iv. gelden:

i. Op basis van stelling 23. en stelling 27. regel ii.

ii. Op basis van stelling 23. en stelling 27. regel iii.

iii. Op basis van stelling 24. en stelling 27. regel ii.

iv. Op basis van stelling 24. en stelling 27. regel iii.

29. Nu eerst een korte samenvatting. De onderstaande stellingen maken duidelijk hoe in grote lijnen de verhouding is tussen de formele en de metaformele getallen:

i. Alle metaformele getallen zijn verzamelingen van enkel formele getallen. Oftewel:

$X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; X \subset \mathfrak{F}$.

ii. Een metaformeel getal bevat altijd één of meer formele getallen. Oftewel:

$X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; (\exists A)[A \in \mathfrak{F} \;\&\; A \in X\,]$.

iii. Voor ieder metaformeel getal X is er minstens één formeel getal A zodat X = mw(A). Oftewel:

$X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; (\exists A)[A \in \mathfrak{F} \;\&\; X = \text{mw}(A)\,].$

iv. Wanneer een formeel getal A een element is van een metaformeel getal X dan geldt: X = mw(A). Oftewel:

$A \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; X = \text{mw}(A).$

v. Voor ieder formeel getal is er een metaformeel getal waar het een element van is. Oftewel:

$A \in \mathfrak{F} \;\Rightarrow\; (\exists X)[X \in \mathfrak{M} \;\&\; A \in X\,].$

vi. Geen enkel formeel getal is een element van twee (of meer) metaformele getallen. Oftewel:

$\neg(\exists A)[\,A \in X \;\&\; A \in Y \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; X \neq Y \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\&\; Y \in \mathfrak{M}\,].$

Bewijs:

We bewijzen achtereenvolgens i. t/m vi. :

i. Wegens definities 18g. en 19. geldt:

$\mathfrak{M} \;=\; \{X \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}) \mid (\exists A)[\,A \in \mathfrak{F} \;\&\; X = [A]_{\heartsuit}\,\}.$

Dus:

$X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; X \in \mathcal{P}(\mathfrak{F})$

$X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; X \subset \mathfrak{F}.$

ii. Wegens definities 18g. en 19. geldt:

$\mathfrak{M} \;=\; \{X \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}) \mid (\exists A)[\,A \in \mathfrak{F} \;\&\; X = [A]_{\heartsuit}\,\}.$

Dus:

$X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; (\exists A)[\,A \in \mathfrak{F} \;\&\; X = [A]_{\heartsuit}\,].$

Op grond van stellingen 10. en 18b. vinden we dan:

$X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; (\exists A)[\,A \in \mathfrak{F} \;\&\; A \in X\,].$

iii. Wegens definities 18g. en 19. geldt:

$\mathfrak{M} \;=\; \{X \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}) \mid (\exists A)[\,A \in \mathfrak{F} \;\&\; X = [A]_{\heartsuit}\,\}.$

Dus:

$X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; (\exists A)[\,A \in \mathfrak{F} \;\&\; X = [A]_{\heartsuit}\,].$

Op grond van definitie 26. vinden we dan:

$X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; (\exists A)[\,A \in \mathfrak{F} \;\&\; X = \text{mw}(A)\,].$

iv. Wegens definities 18g. en 19. geldt:

$\mathfrak{M} \;=\; \{X \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}) \mid (\exists E)[\,E \in \mathfrak{F} \;\&\; X = [E]_{\heartsuit}\,\}.$

Dus:

$X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; (\exists E)[\,X = [E]_{\heartsuit}\,].$

Zodat:

$A \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow$
$(\exists E)[\,A \in X \;\&\; X = [E]_{\heartsuit}\,]$

$A \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow$
$(\exists E)[\,A \in [E]_{\heartsuit} \;\&\; X = \mathrm{mw}(E)\,]$ (zie 26.)

$A \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow$
$(\exists E)[\,A \heartsuit E \;\&\; X = \mathrm{mw}(E)\,]$ (zie 18a.)

$A \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow$
$(\exists E)[\,\mathrm{mw}(A) \;=\; \mathrm{mw}(E) \;\&\; X = \mathrm{mw}(E)\,]$ (zie 27. regel ii.)

$A \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; (\exists E)[\,X = \mathrm{mw}(A)\,]$

$A \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; X = \mathrm{mw}(A).$

v. Wegens stellingen 10. en 18b. geldt:

$A \in \mathfrak{F} \;\Rightarrow\; A \in [A]_{\heartsuit}.$

Op basis van definities 18g. en 19. vinden we dan:

$A \in \mathfrak{F} \;\Rightarrow\; (\exists X)[X \in \mathfrak{M} \;\&\; A \in X\,].$

vi. Dit volgt direct uit definitie 18h. en stelling 27. regel vi.

30. Wanneer twee formele getallen A en B elementen zijn van een en hetzelfde metaformele getal X dan hebben deze formele getallen een gelijke reële waarde. Oftewel:

$A \in X \;\&\; B \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; B \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow\; \mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B).$

Bewijs:

$A \in X \;\&\; B \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; B \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow$
$X = \mathrm{mw}(A) \;\&\; X = \mathrm{mw}(B)$ (zie 29. regel iv.)

$A \in X \;\&\; B \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; B \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow$
$\mathrm{mw}(A) = \mathrm{mw}(B)$

$A \in X \;\&\; B \in X \;\&\; A \in \mathfrak{F} \;\&\; B \in \mathfrak{F} \;\&\; X \in \mathfrak{M} \;\Rightarrow$
$\mathrm{rw}(A) = \mathrm{rw}(B)$ (zie 28. regel i.).

31. Voor twee formele getallen A en B met een gelijke reële waarde bestaat er niet steeds een metaformeel getal X waarvan zowel A als B elementen zijn.

Bewijs:

We geven een voorbeeld. Laat:

$A = 0,$

$B = (0) \clubsuit (0),$

$X = [0]_{\heartsuit}.$

Dan zijn A en B volgens definitie 1. formele getallen, en is vervolgens X wegens stelling 10. en definities 18g. en 19. een metaformeel getal.

Op basis van definitie 2. geldt: rw(A) = 0 en rw(B) = 0. Zodat:

rw(A) = rw(B) .

Volgens stelling 25. is het formele getal 0 alleen gelijkaardig aan het formele getal 0 zelf. Zodat ook het enige formele getal E waarvoor $E \heartsuit 0$ geldt, het formele getal 0 zelf is. Dit geeft:

$X = [0]_{\heartsuit}$

$X = \{0\}$ (zie 10. en 18a.)

$X = \{A\}.$

Dus:

$A \in X.$

Maar:

$B \notin X.$

Wegens stelling 29. regel vi. bestaat er dan evenmin een ander metaformeel getal waarvan zowel A als B elementen zijn.

32. We noemen een metaformeel getal X alleen dan *dik* - genoteerd als Dik(X) - wanneer er een reëel getal r bestaat zodanig dat alle formele getallen met de reële waarde r elementen van X zijn. Verder noemen we een metaformeel getal X alleen dan *dun* - genoteerd als Dun(X) - wanneer er géén reëel getal r bestaat zodanig dat alle formele getallen met de reële waarde r elementen van X zijn. Een metaformeel getal is dus ofwel dik ofwel dun (maar nimmer noch dik noch dun, of dik en dun tegelijk).

33. Onder de *reële reductiefunctie* ϱ verstaan we de onderstaande functie:

$\varrho : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}\,;\ \varrho(X) = \mathrm{rw}(A)$ met $A \in X$.

Wegens stelling 29. regels i. en ii. zijn er voor alle metaformele getallen X één of meer elementen A van X, en zijn zulke elementen A van X ook steeds formele getallen. Bovendien hebben volgens stelling 30. alle formele getallen A die elementen van een zelfde metaformeel getal X zijn dezelfde reële waarde. De boven gegeven definitie levert daarom voor alle metaformele getallen X een daarbij horend eenduidig bepaald reëel getal $\mathrm{rw}(A)$ op. We noemen $\varrho(X)$ de *gereduceerde waarde* van X.

34. Alle metaformele getallen met gereduceerde waarde nul zijn dun. Oftewel:

$X \in \mathfrak{M}\ \&\ \varrho(X) = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Dun}(X)$.

Bewijs: Volgens stelling 25. is het formele getal 0 alleen gelijkaardig aan het formele getal 0 zelf. Dus bevindt zich wegens definitie 19. bijvoorbeeld het formele getal $(0)\clubsuit(0)$ niet in het metaformeel getal $[0]_{\heartsuit}$. Maar volgens stelling 29. regel vi. is geen enkel formeel getal een element van twee (of meer) metaformele getallen. Dus is er geen metaformeel getal dat zowel 0 als $(0)\clubsuit(0)$ bevat. Bovendien hebben zowel het formele getal 0 als het formele getal $(0)\clubsuit(0)$ op grond van definitie 2. de reële waarde 0. Derhalve is er geen metaformeel getal dat alle formele getallen met reële waarde nul bevat. Dus is er ook geen metaformeel getal *met gereduceerde waarde nul* dat alle formele getallen met reële waarde nul bevat. Anders gezegd: voor alle metaformele getallen X met gereduceerde waarde nul zijn er formele getallen met reële waarde nul die niet in X zitten. En omdat alle formele getallen in een metaformeel getal X met gereduceerde waarde nul de reële waarde nul hebben (zie 33.), zijn er ook voor alle r ongelijk aan nul formele getallen met reële waarde r die niet in X zitten. Dus voor alle metaformele getallen X met gereduceerde waarde nul zijn er voor *ieder* reëel getal r formele getallen met de reële waarde r die niet in X zitten. Oftewel alle metaformele getallen met gereduceerde waarde nul zijn dun (zie 32.).

35. Alle metaformele getallen met gereduceerde waarde ongelijk aan nul zijn dik. Oftewel:

$X \in \mathfrak{M}\ \&\ \varrho(X) \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Dik}(X)$.

Bewijs: Laat X een metaformeel getal met een gereduceerde waarde g ongelijk aan nul zijn. Dan bevat X op basis van definitie 33. een formeel getal A met rw(A) = g. Bovendien is er dan wegens definitie 19. een formeel getal C zodat $X = [C]_{\heartsuit}$. Dus geldt dan dat $A \heartsuit C$. Laat nu B een willekeurig van A verschillend formeel getal met rw(B) = g zijn. Dan geldt volgens stelling 24. dat $B \heartsuit A$. Wegens de transitiviteit van de gelijkaardigheid (zie 10.) geldt dan: $B \heartsuit C$. En derhalve $B \in [C]_{\heartsuit}$, oftewel: $B \in X$. Alle van A verschillende formele getallen met reële waarde g zitten dan dus ook in X. Dus is X op grond van definitie 32. dik.